

**Untersuchungen zum Verhalten von
Markov-Ketten höherer Ordnung im
phänomenologischen MSSM**

Alexander Craig Johnston

Bachelorarbeit in Physik
angefertigt im Physikalischen Institut

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
Bonn

August 2016

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Bonn,
Datum

.....
Unterschrift

- 1. Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Philip Bechtle
- 2. Gutachter: Prof. Dr. Klaus Desch

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Klaus Desch und Herrn Priv.-Doz. Dr. Philip Bechtle danke ich für die Bereitstellung des interessanten Themas dieser Arbeit und die guten Arbeitsbedingungen in der Arbeitsgruppe. Herrn Bechtle möchte ich besonders für die intensive Betreuung und auch Einarbeitung in technische Fragen danken. Ich bedanke mich bei jedem Mitglied der Arbeitsgruppe Desch für das gute Arbeitsklima. Mein besonderer Dank gilt dabei Oliver Ricken und allen anderen Mitarbeitern des IT-Supports, die einige Pannen an meinem Hauptarbeitsgerät, der Bonn Analysis Facility, behoben. Gleichmaßen gilt mein Dank der Fittino-Kollaboration für die vielen anregenden Telefonkonferenzen und die Möglichkeit, mit dieser Arbeit etwas zu ihrer Forschung beitragen zu können. Darunter möchte ich Björn Sarrazin und insbesondere Dr. Matthias Hamer für wertvolle Hilfe und Unterstützung danken.

Darüber hinaus gilt mein Dank jedem Verantwortlichen dafür, dass am Physikalischen Institut der Universität Bonn so intensiv und produktiv auf dem Gebiet der Supersymmetrie geforscht wird. Ich hoffe, dass diese Arbeit in Zukunft weiter geführt wird.

Außerdem danke ich meiner Familie für das Korrekturlesen und moralische Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik	3
2.2	Die supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells	4
2.2.1	Das MSSM und das pMSSM11	5
2.3	Fittino und die verwendeten Observablen	6
2.4	Markov-Ketten und ihre Verwendung in Fittino	8
2.4.1	Markov-Ketten	8
2.4.2	Markov Chain Sampler	8
2.4.3	Higher Order Markov Chain Sampler	9
3	Zweidimensionale Untersuchungen	13
3.1	Startbedingungen	13
3.2	χ^2 -Profile	13
3.3	Ursache der Einschränkung des Profils für große M_1	15
3.4	Effizienzvergleich	16
3.5	Korrelation zwischen M_1 und M_2	23
4	Siebendimensionale Untersuchungen	27
4.1	Startbedingungen	27
4.2	χ^2 -Profile	28
4.3	Effizienzvergleich	32
4.4	Korrelationen zwischen den Parametern	35
5	Fazit	43
A	Weitere χ^2-Profile der siebendimensionalen Untersuchung	45
	Literatur	49
	Abbildungsverzeichnis	51
	Tabellenverzeichnis	53

Einleitung

Das Standardmodell der Teilchenphysik beschreibt eine Vielzahl experimenteller Befunde sehr akkurat und kann daher als eine sehr erfolgreiche Theorie betrachtet werden. Dennoch bietet es keine Erklärung für dunkle Materie und den Versuch, alle Kräfte der Natur im Rahmen einer vereinheitlichten Theorie zu beschreiben. Darüber hinaus besteht offenbar eine Feinabstimmung zwischen verschiedenen Größen des Standardmodells, sodass der Schluss naheliegt, dass es keine vollständige Theorie der Natur ist. Supersymmetrie ist eine der bestmotivierten Erweiterungen des Standardmodells. Falls sie in der Natur realisiert ist, ist es von besonderem Interesse, die Parameter der Lagrangedichte der zugrunde liegenden Quantenfeldtheorie zu bestimmen. Es gibt verschiedene Kandidaten für eine fundamentale supersymmetrische Theorie. Eine vereinfachte Variante einer minimalen supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells, das phänomenologische MSSM mit elf freien Parametern (pMSSM11) ist Grundlage dieser Arbeit. Der Aufgabe, Werte von Parametern eines solchen Modells mit experimentellen Beobachtungen zu konfrontieren, dient das Programm Fittino. Das Hauptziel der vorliegenden Bachelorarbeit besteht darin zu untersuchen, wie effizient die dazu vorgesehenen Funktionen des Programms den Parameterraum scannen. Dazu werden in verschiedenen Untersuchungen zwei oder sieben Parameter mit einfachen Markov-Ketten und mit Markov-Ketten höherer Ordnung variiert, während die anderen Parameter festgehalten werden, und daraus bestimmte Kenngrößen, die die Effizienz charakterisieren, bestimmt.

In Kapitel 2 wird ein kurzer Überblick über das Standardmodell der Teilchenphysik und seine supersymmetrische Erweiterung gegeben, sowie das hier betrachtete pMSSM11 vorgestellt. Darüber hinaus wird die Funktionsweise von Fittino erklärt und die Art und Weise, wie mit Markov-Ketten und Markov-Ketten höherer Ordnung der Parameterraum untersucht wird.

Die Untersuchung eines zweidimensionalen Modells, in dem nur M_1 und M_2 variiert werden, wird in Kapitel 3 dargestellt. Es wird das χ^2 -Profil betrachtet, seine Einschränkung durch Observablen erläutert und Effizienz-Maßstäbe auf die Untersuchungen durch Markov-Ketten und verschiedene Arten von Markov-Ketten höherer Ordnung angewandt. Schließlich wird die Korrelation der beiden Parameter durch verschiedene Auftragungen derselben untersucht.

In Kapitel 4 werden ähnliche Methoden wie im vorigen auf die Untersuchung eines siebendimensionalen Parameterraums angewandt. Dabei wird das χ^2 gegen jeden der Parameter dargestellt, die gleichen Effizienzmaßstäbe wie in Kapitel 3 auf alle sieben Parameter angewandt und einige der Korrelationskoeffizienten auf die gleiche Weise wie dort untersucht. Der siebendimensionale Parameterraum ist allein schon aufgrund der höheren Anzahl an Parametern für eine Untersuchung deutlich herausfordernder. Außerdem können sich durch die Art und Weise, wie die Parameter miteinander korreliert sind, komplexere Strukturen im χ^2 -Profil ausbilden. Daher werden für ausreichend gründliche Untersuchung sehr viel

mehr Punkte als im zweidimensionalen Fall benötigt. Dieses Ziel wurde in der vorliegenden Studie aus zeitlichen Gründen nicht vollständig erreicht. Eine erste Einstufung des Verhaltens der verschiedenen Algorithmen zur Untersuchung des Parameterraums ist dennoch möglich.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse findet sich in [Kapitel 5](#).

Theoretische Grundlagen

2.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist eine renormierbare, lorentz- und eichinvariante Quantenfeldtheorie, mittels welcher sich alle Phänomene der Erzeugung, Vernichtung und Wechselwirkung der bekannten Elementarteilchen auf fundamentaler Ebene beschreiben lassen. Im Rahmen dieses Modells lässt sich jedes Materieteilchen als Zusammensetzung von fundamentalen Fermionen darstellen. Die Kräfte zwischen diesen, die sie zusammen halten, voneinander abstoßen oder zerfallen lassen, werden durch fundamentale Bosonen vermittelt.

Das Standardmodell enthält diese Kräfte als die starke und elektroschwache Kraft, welche eine vereinheitlichte Beschreibung des Elektromagnetismus und der schwachen Kraft ist [1–3]. Eine formale, theoretische Beschreibung finden diese Kräfte in den Eichgruppen. Die Eichgruppe des Standardmodells ist $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Dies sind alle Grundkräfte der Physik mit Ausnahme der Gravitation. Diese wird im Standardmodell aufgrund ihrer relativen Schwäche ausgelassen, durch die sie keinen messbaren Einfluss auf gegenwärtige teilchenphysikalische Experimente hat. Man erwartet eine mit den anderen Kräften vergleichbare Stärke der Gravitation erst bei der sogenannten Planck-Skala von 10^{19} GeV [4], welche weit außerhalb der Reichweite derzeitiger Experimente ist.

Da alle uns gut bekannte Materie aus elementaren Materieteilchen (Quarks und Leptonen) besteht und sich alle uns bekannten Kräfte auf die drei genannten Grundkräfte zurückführen lassen, kann prinzipiell jedes bekannte physikalische Phänomen, in dem die Gravitation zu vernachlässigen ist, auf eine Beschreibung im Rahmen des Standardmodells zurückgeführt werden.

Alle (bekannten) fundamentalen Fermionen nehmen an der schwachen Wechselwirkung teil. Diejenigen, die nicht an der starken Wechselwirkung teilnehmen, nennt man Leptonen, die anderen werden Quarks genannt. Diese treten nicht einzeln auf, sondern verbinden sich über die starke Wechselwirkung immer zu Hadronen.

Quarks und Leptonen lassen sich in drei Familien einteilen, von denen jede zwei Quarks mit einer elektrischen Ladung von $+\frac{2}{3}e$ bzw. $-\frac{1}{3}e$ (wobei e die Elementarladung ist), ein mit $-e$ elektrisch geladenes Lepton und ein ungeladenes (Neutrino) enthält.

Zu jedem Teilchen des Standardmodells gibt es ein Antiteilchen gleicher Masse und additiver Quantenzahlen (z. B. elektrischer Ladung) umgekehrten Vorzeichens, wobei in manchen Fällen Teilchen und Antiteilchen identisch sind.

Der derzeit einzige direkte experimentelle Zugang zu Physik jenseits des Standardmodells sind die Neutrinooszillationen, die beweisen, dass die Ruhemasse der Neutrinos nicht verschwindet [5]. Allerdings bedeutet dies nur eine Erweiterung des Standardmodells um drei Parameter für die Massen und vier für

die PMNS-Matrix [6]. Dieser Abschnitt soll nur einen hochkomprimierten Überblick geben. Ausführliche Einführungen in das Standardmodell finden sich in [6] und [7].

2.2 Die supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells

Supersymmetrie ist eine Symmetrie, die einem Fermion ein Boson zuordnet und umgekehrt. Theorien, die jedem fermionischen Freiheitsgrad des Standardmodells (mindestens) einen bosonischen zuordnen und umgekehrt, bieten Lösungen von Problemen der Teilchenphysik an. Einige der wichtigsten Motivationen dieser Theorie werden im folgenden aufgezählt.

- **Vereinigung:** Ähnlich wie es in der Vergangenheit der Physik gelungen ist, Elektrizität und Magnetismus zum Elektromagnetismus zu vereinen und diesen mit der schwachen Kraft zur elektroschwachen Wechselwirkung, ist es ein Ziel der Physik, starke und schwache Kraft in einer vereinheitlichten Theorie zu beschreiben, in der es nur eine Eichgruppe und eine Kopplungskonstante gibt. Derartige Theorien werden als **Grand Unified Theories (GUTs)** bezeichnet. Man erwartet aufgrund der Lebensdauer des Protons eine derartige Vereinigung oberhalb der Energieskala von 10^{16} GeV, sodass sie experimentell nicht zugänglich ist.¹ Trotzdem sagen die meisten dieser Theorien Teilchen vorher, die den Standardmodell-Teilchen durch Supersymmetrie zugeordnet werden können und auch bei Energien deutlich unter dieser Skala vorhanden sein müssen. Insbesondere werden derartige Teilchen benötigt, damit alle drei Kopplungskonstanten des Standardmodells tatsächlich bei derselben Energie den gleichen Wert annehmen und nicht bei verschiedenen [4, 6].
- **Dunkle Materie:** Das Standardmodell der Kosmologie beinhaltet ausgehend von Beobachtungen der Astronomie die These, dass ein sehr großer Massenanteil der Materie des Universums in Form von „Dunkler Materie“ vorliegt. Diese wechselwirkt nicht elektromagnetisch. Weiterhin kann diese zum Großteil nicht aus baryonischer Materie bestehen. Auch Neutrinos, welche diese Bedingungen erfüllen und im Standardmodell enthalten sind, stellen keine erfolgreichen Kandidaten dar, sodass alle Teilchen des Standardmodells ausgeschlossen sind. Ein stabiles, supersymmetrisches, massives und neutrales Teilchen ist ein sehr aussichtsreicher Kandidat für die Erklärung der dunklen Materie im Rahmen der Teilchenphysik [8].
- **Hierarchie-Problem und Feinabstimmung:** Die Masse des Higgs-Bosons, das für die spontane elektroschwache Symmetriebrechung verantwortlich ist, liegt mit 125 GeV sehr weit unterhalb der GUT-Skala (gleiches gilt für den Abschneideparameter der Quantenchromodynamik) und kann aus GUT-Parametern nur dann extrahiert werden, wenn diese auf etwa 24 gültige Stellen abgestimmt sind, vorausgesetzt, dass das Standardmodell bis knapp unterhalb der GUT-Skala (beispielsweise bis etwa 10^{15} GeV) gültig ist. Andernfalls verliert das Standardmodell schon bei deutlich niedrigeren Energien seine Gültigkeit [6]. Der Grund sind Schleifenkorrekturen auf die Higgs-Masse durch die Selbstwechselwirkung des Higgs-Bosons und seine Kopplung an Fermionen. Die Selbstwechselwirkung kann durch die Kopplung an weitere Fermionen kompensiert werden, fermionische Korrekturen durch die Kopplung an weitere skalare Teilchen, deren Existenz man fordern muss. Genau das tut die Theorie der Supersymmetrie [4, 6].

¹ Der derzeit leistungsstärkste Teilchenbeschleuniger der Welt, der Large Hadron Collider (LHC) am CERN erreicht eine Schwerpunktsenergie von 13 TeV, ist also 12 Größenordnungen unter dieser Energie. Die Elektroschwache Vereinigung vollzieht sich dagegen bei einer Skala von 100 GeV und konnte somit schon gut erforscht werden.

Den Fermionen, die aufgrund ihrer Chiralität zwei Freiheitsgrade haben, werden jeweils zwei skalare Teilchen zugeordnet, sodass die Anzahl der Freiheitsgrade erhalten bleibt. Die Superpartner der Fermionen werden als Sfermionen bezeichnet (das „S“ steht für „skalar“). Die Superpartner spezifischer Fermionen werden ebenfalls dadurch bezeichnet, dass dem Namen des Standardmodell-Teilchens ein „S“ vorangestellt wird und das Teilchensymbol um eine Tilde ergänzt wird (zum Beispiel ist das Scharm \tilde{c} ein Squark \tilde{q} und das Selekttron-Sneutrino $\tilde{\nu}_e$ ein Slepton \tilde{l}). Den Eichbosonen werden als Gauginos bezeichnete Fermionen zugeordnet, deren Name auf „-ino“ endet, und die ebenfalls durch eine Tilde von ihren Superpartnern unterschieden werden. So werden den acht Gluonen g die Gluinos \tilde{g} zugeordnet. Den Eigeigenzuständen der elektroschwachen Theorie ($W^{\pm,0}$ - und B -Bosonen, aus denen durch die elektroschwache Symmetriebrechung die Masseneigenzustände W^\pm , Photon γ und Z hervorgehen), werden Wino $\tilde{W}^{\pm,0}$ und Bino \tilde{B} zugeordnet. Die geladenen \tilde{W}^\pm mischen mit den geladenen Higgsinos \tilde{H}_2^+ und \tilde{H}_1^- zu vier Charginos $\tilde{\chi}_1^\pm$ und $\tilde{\chi}_2^\pm$, wohingegen \tilde{W}^0 und \tilde{B} untereinander und mit den neutralen Higgsinos \tilde{H}_2^0 und \tilde{H}_1^0 zu vier Neutralinos $\tilde{\chi}_1^0, \tilde{\chi}_2^0, \tilde{\chi}_3^0, \tilde{\chi}_4^0$ mischen.

Den Teilchen dieser Theorie wird die multiplikative Quantenzahl R -Parität zugeordnet, die als

$$R = (-1)^{3B+L+2J}$$

definiert ist, wobei B die Baryonenzahl, L die Leptonenzahl und J den Spin bezeichnen. Für die bekannten Standardmodellteilchen gilt $R = 1$, für ihre Superpartner $R = -1$. Falls sie erhalten ist, ist das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) stabil und somit ein möglicher Konstituent der dunklen Materie.

Bislang wurde kein supersymmetrisches Teilchen beobachtet. Dies bedeutet, dass die Supersymmetrie gebrochen ist, sodass die Teilchen mit negativer R -Parität sehr viel massereicher sind als ihre bekannten Standardmodell-Partner. Es ist jedoch nicht bekannt, welcher Mechanismus diese Brechung verursacht. Daher parametrisiert man sie durch sogenannte „soft SUSY breaking parameters“.

2.2.1 Das MSSM und das pMSSM11

Die im vorigen Abschnitt genannten Probleme des Standardmodells lassen sich in einem Modell lösen, wo jedem fermionischen Freiheitsgrad des Standardmodells nur ein bosonischer zugeordnet wird (und nicht mehrere). Dieses Modell wird als Minimales supersymmetrisches Standardmodell (MSSM) bezeichnet. Es umfasst aufgrund der Tatsache, dass der unbekannte Mechanismus der Supersymmetrie-Brechung parametrisiert werden muss bei nichttrivialer Abzählung 105 freie Parameter. Eine solche Fülle an Parametern experimentell und mit Computermodellen zu untersuchen, ist eine Herausforderung, die den Rahmen jeglicher Forschung auf diesem Gebiet bei weitem sprengt. Durch geeignete Zwangsbedingungen lässt sich die Anzahl der freien Parameter jedoch drastisch reduzieren. Setzt man alle komplexen Phasen auf 0 und schließt man jegliche Flavour-Verletzung jenseits des Standardmodells aus, so reduziert sich die Anzahl der freien Parameter auf 19. Dies ist gerechtfertigt, weil die experimentell beobachtete Flavour-Verletzung sehr gering ist und das Standardmodell ausreicht, um sie zu erklären, sodass die durch Supersymmetrie vermittelte Flavour-Verletzung als verschwindend gering angenommen werden kann. Da 19 Dimensionen immer noch einen Parameterraum von enormer Größe bedeuten, bietet es sich an, durch weitere Festlegungen, zum Beispiel die Gleichsetzung verschiedener Parameter, deren effektive Anzahl einzuschränken. Das Modell, mit dem sich diese Arbeit befasst, hat 11 freie, supersymmetrische Parameter und wird deswegen als pMSSM11 bezeichnet. Diese sind:

- Drei Gaugino-Massen: $M_{1,2,3}$,
- zwei Squark-Massen: $m_{\tilde{q}_1} = m_{\tilde{q}_2} \neq m_{\tilde{q}_3}$,
- zwei Slepton-Massen: $m_{\tilde{l}_1} = m_{\tilde{l}_2} \neq m_{\tilde{l}_3}$,

- die Masse des pseudoskalaren Higgs-Bosons: M_A ,
- die trilineare Kopplung A ,
- der Higgs-Mischungsparameter: μ ,
- das Verhältnis der Vakuumserwartungswerte: $\tan\beta$.

Unter Massen sind hier grundsätzlich „soft SUSY breaking parameters“ der Lagrange-Dichte zu verstehen und keine physikalischen Teilchenmassen. Die Indizes der Gaugino-Massen beziehen sich auf die Eichgruppen der zugehörigen Standardmodell-Eichbosonen. Die Indizes der Squarks und Sleptonen beziehen sich auf die Teilchen-Familien des Standardmodells. Zusätzlich zu diesen Parametern kann in der aktuellen Untersuchung auch die mit M_{input} bezeichnete Energieskala der Supersymmetriebrechung genau so wie die aufgezählten Parameter angepasst werden. Das gleiche gilt für die Masse des top-Quarks m_t , wobei hierbei die experimentellen Einschränkungen bereits äußerst eng sind [9]. Der Grund ist, dass das verwendete Modell verglichen mit anderen Parametern des Standardmodells (deren Fehlergrenzen darüber hinaus in vielen Fällen kleiner sind) sehr empfindlich auf diesen Parameter ist.

2.3 Fittino und die verwendeten Observablen

Fittino ist ein Programm, mit dessen Hilfe Parameter der Lagrangedichte des MSSM² gemäß einer iterativen Methode durch einen globalen Fit bestimmt werden können. Auf diese Weise sollen Erkenntnisse über den Brechungsmechanismus der Supersymmetrie erlangt werden, vorausgesetzt, sie ist in der Natur realisiert. Doch auch der Ausschluss von Modellen gelingt gerade durch einen globalen Fit. So konnte das sogenannte constrained MSSM, ein radikal vereinfachtes Modell mit nur fünf freien Parametern, ausgeschlossen werden [11]. Fittino ist frei verfügbar, in C++ implementiert und kann unter [12] eingesehen werden. Eine genauere Beschreibung von Fittino findet sich in [10]. In den verwendeten Datensätzen sind Ergebnisse der ATLAS- und CMS-Kollaboration sowie solche des astrophysikalischen Large Underground Xenon (LUX) Dark Matter Experiments enthalten. Hinzu kommen niederenergetische Observablen, die in Tabelle 2.1 aufgelistet werden. Weiterhin ist Fittino darauf ausgelegt, dass Ergebnisse möglicher künftiger Collider wie des ILC verwendet werden können.

Zu einer Kombination von Parametern, also einem Punkt im Parameterraum, wird mit Hilfe von „theory codes“ (Theorie-Programmen), die über entsprechende Schnittstellen in Fittino genutzt werden, ein Wert für die Güte der Anpassung χ^2 berechnet. Dies geschieht dadurch dass die „theory codes“ berechnen, welche Observablen (Wirkungsquerschnitte oder Ereignisanzahlen beispielsweise) sich aus der vorliegenden Kombination von Parametern ergeben. Diese werden mit den Daten aus Messungen, die in die Berechnung einfließen, verglichen. Darunter sind die in Tabelle 2.1 aufgelisteten Observablen, Ausschluss-Grenzen durch direkte Suchen nach Supersymmetrie in Hochenergiephysik-Experimenten und Messungen aus dem Higgs-Sektor von der bereits genannten ATLAS- und der CMS-Kollaboration, sowie des LUX-Experiments.

Der seltene Zerfall $B_s \rightarrow \mu\mu$, genauer gesagt seine Zerfallsbreite $\Gamma_{B_s}^{\mu\mu}$ bzw. sein Verzweigungsverhältnis (Branching Ratio) $\mathcal{B}(B_s \rightarrow \mu\mu)$, ist sehr empfindlich auf die Existenz supersymmetrischer Teilchen, weil er im Standardmodell hauptsächlich über ein helizitätsunterdrücktes Pinguin-Diagramm stattfindet. Dieses enthält dominant eine W -Boson-Top-Schleife. Ein entsprechendes Diagramm mit einer Chargino-Stop-Schleife, kann daher merkliche Beiträge liefern [6].

² Fittino ermöglicht den gleichzeitigen Fit von 24 MSSM- und 7 Standardmodell-Parametern, die in [10] eingesehen werden können.

Formelsymbol	Wert	theoretische Unsicherheit	Bedeutung
$\mathcal{B}(B_s \rightarrow \mu\mu)$	$(2,90 \pm 0,70) \cdot 10^{-9}$ [13]	26%	Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $B_s \rightarrow \mu\mu$
$\mathcal{B}(B_s \rightarrow s\gamma)$	$(3,43 \pm 0,21 \pm 0,07) \cdot 10^{-4}$ [14]	14%	Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $b \rightarrow s\gamma$
$\mathcal{B}(B \rightarrow \tau\nu)$	$(1,05 \pm 0,25) \cdot 10^{-4}$ [14]	20%	Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $B \rightarrow \tau\nu$
Δm_s	$(17,719 \pm 0,036 \pm 0,023)\text{ps}^{-1}$ [15]	24%	Oszillationsfrequenz von B_s
$a_\mu - a_\mu^{\text{SM}}$	$(28,7 \pm 8,0) \cdot 10^{-10}$ [16, 17]	7%	$a_\mu \equiv (g - 2)_\mu$ Differenz zw. Messung & Standardmodell-Vorhersage d. magnetischen Moments des Myons
M_W	$(80,385 \pm 0,015 \pm 0,001) \text{ GeV}$ [18]	0,01%	Masse des W -Bosons
$\sin^2 \theta_{\text{eff}}$	$0,23113 \pm 0,00021 \pm 0,00050$ [19]	0,05%	Wert des Weinberg-Winkels
m_t	$(173,34 \pm 0,71 \pm 0,27) \text{ GeV}$ [20]	1 GeV	Top-Masse
Ωh^2	$0,1187 \pm 0,0017$ [21]		Kosmologischer Dichte-parameter dunkler Materie

Tabelle 2.1: Observablen, die den Fit in Fittino beeinflussen.

Der Zerfall $b \rightarrow s\gamma$ läuft ebenfalls dominant über eine W -Boson-Top-Schleife ab, auch durch eine Chargino-Stop-Schleife ersetzt werden kann.

Der Zerfall $B \rightarrow \tau\nu$ wird im Standardmodell überwiegend durch ein W -Boson vermittelt. Dieses kann in einer supersymmetrischen Erweiterung durch ein geladenes Higgs-Boson ersetzt werden.

Das anomale magnetische Moment des Myons liegt in Messungen ungefähr 3 Standardabweichungen oberhalb der theoretischen Vorhersage durch das Standardmodell [16, 17]. Dies ist möglicherweise ein Hinweis auf Supersymmetrie, ist jedoch stark korreliert mit dem Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $B_s \rightarrow \mu\mu$ [22]. Die in [11] beschriebene Analyse konnte das cMSSM nur aufgrund der Berücksichtigung des anomalen magnetischen Moments des Myons mit einem hohen Konfidenzniveau ausschließen, weil seine Zwangsbedingungen denen der anderen Observablen widersprechen.

Die Ergebnisse der Higgs-Physik werden durch HIGGSIGNALS [23] und HIGGSBOUNDS [24] beigetragen

Von allen anderen Observablen (z. B. Teilchenmassen, Mischungswinkeln, Kopplungskonstanten oder Zerfallsbreiten) wird angenommen, dass ihre aus [9] bekannten Werte nicht mit angepasst werden müssen. Gründe hierfür können geringe Fehlergrenzen sein (so ist zum Beispiel die Masse des Z -Bosons um einiges genauer bekannt als die des W -Bosons [5, 9]) oder die Annahme, dass diese Observablen nicht sensitiv auf Supersymmetrie sind, das heißt, dass sie kein Unterscheidungskriterium zwischen dem Standardmodell und dem pMSSM11 darstellen.

Die Berechnung des Wertes für χ^2 erfolgt gemäß der Formel

$$\chi^2 = \sum_{\text{Observablen}} \frac{(x_m - x_{\text{pred}})^2}{\sigma_m^2 + (x_{\text{pred}} \cdot \sigma_{\text{pred}})^2} + \chi_{\text{extern}}^2,$$

wobei x_m der gemessene Wert einer Observablen und x_{pred} der in der Theorie vorhergesagte Wert der Observablen ist. Der Messfehler auf die Größe wird mit σ_m bezeichnet, σ_{pred} ist die theoretische relative Unsicherheit der Größe. Unter χ_{extern}^2 sind Beiträge von LUX, ATLAS- und CMS-Kollaboration sowie HIGGSBOUNDS HIGGSIGNALS zu verstehen.

2.4 Markov-Ketten und ihre Verwendung in Fittino

2.4.1 Markov-Ketten

Eine Markov-Kette ist ein statistischer Prozess auf einem Zustandsraum, der einem Zustand allein auf der Grundlage des Zustands und einer Wahrscheinlichkeitsverteilung einen weiteren Zustand zuordnet. Die entscheidende Eigenschaft ist dabei, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung nur vom aktuellen Zustand abhängt, und nicht von früheren, man spricht daher von „Gedächtnislosigkeit“. Dieses Prinzip lässt sich dahingehend verallgemeinern, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung von den letzten n Zuständen abhängt. In diesem Fall spricht man von einer Markov-Kette n -ter Ordnung.

Formal definiert man Markov-Ketten folgendermaßen: Sei $Y = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Zufallsvariablen mit $X_t \in S$, wobei $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ ein höchstens abzählbarer Zustandsraum ist, dann ist Y genau dann eine Markov-Kette, wenn

$$P(X_{t+1} = s_{j_{t+1}} \mid X_t = s_{j_t}, X_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, X_0 = s_{j_0}) = P(X_{t+1} = s_{j_{t+1}} \mid X_t = s_{j_t})$$

gilt. Die früheren Zustände $s_{j_{t-1}} \dots s_{j_0}$ spielen also keine Rolle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Markov-Ketten n -ter Ordnung kann man analog definieren, wobei hierbei für die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(X_{t+1} = s_{j_{t+1}} \mid X_t = s_{j_t}, X_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, X_0 = s_{j_0}) = P(X_{t+1} = s_{j_{t+1}} \mid X_t = s_{j_t}, \dots, X_{t-n+1} = s_{j_{t-n+1}})$$

gelten muss [25].

In der Anwendung in Fittino, auf die in den folgenden beiden Abschnitten detaillierter eingegangen wird, entspricht der Zustandsraum S dem multidimensionalen Raum von Parametern, der zwar theoretisch bei n Parametern dem Raum \mathbb{R}^n entspricht und somit überabzählbar unendlich viele Elemente enthält. Da sie jedoch technisch am Rechner als Gleitkommazahl dargestellt werden, ist die Abzählbarkeit gegeben (die für die Umsetzung ohnehin nicht zwingend notwendig ist). Die einzelnen Punkte im Parameterraum, also eine Kombination von Parametern, entspricht den Elementen s_j des Zustandsraums. Die Schritte der Markov-Kette, entsprechend den Zufallsvariablen X_t , sind diejenigen Punkte, die von der Markov-Kette durch Zufall ausgewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Punkt angesteuert wird, ist durch eine Normalverteilung gegeben.

2.4.2 Markov Chain Sampler

Der Markov Chain Sampler ist eine Klasse in Fittino [12], die dazu dient, den Parameterraum effizient zu untersuchen. Dieser besitzt bei fast jedem Modell, das für eine Untersuchung in Frage kommt, sehr viele Dimensionen (im Falle des pMSSM11 sind es elf, wenn die Top-Masse m_t und die Energieskala der Supersymmetriebrechung M_{input} mit angepasst werden sogar 13). Daher würde ein äquidistantes Abschreiten sehr viele untersuchte Punkte und damit sehr viel Rechenzeit erfordern. Außerdem ist das χ^2 oft in weiten Teilen des Parameterraums sehr hoch, während es zum Teil in nur schmalen Bereichen niedrig ist (dies wird auch in dieser Arbeit noch zu sehen sein, zum Beispiel in Abbildung 3.1). Gerade die Bereiche mit niedrigem χ^2 sollten intensiv untersucht werden. Insbesondere ist das niedrigste χ^2 (im Folgenden χ_{min}^2) von Interesse, und damit die Kombination von Parametern, für die die höchste Übereinstimmung zwischen den Modellvorhersagen und den experimentellen Resultaten besteht. Auch ist es wichtig zu betrachten, in welchen Bereichen des Parameterraums das χ^2 um weniger als 1 bzw. um weniger als 5,99 über χ_{min}^2 liegt. Diese Bereiche entsprechen einem Konfidenzniveau von 68% bzw. 95%, das heißt, der Punkt der besten Übereinstimmung liegt mit dieser Wahrscheinlichkeit im entsprechenden

Bereich. Aus diesen Gründen wird eine Methode benötigt, mit welcher der Parameterraum auf eine Art und Weise untersucht werden kann, die an die Abhängigkeit des χ^2 von den Parametern angepasst ist. Diese sind im Markov Chain Sampler und Higher Order Markov Chain Sampler (in Abschnitt 2.4.3 näher erläutert) realisiert.

Da diese beiden Klassen eine Monte-Carlo-Methode verwenden, spricht man auch von „Markov Chain Monte Carlo“ (MCMC) bzw. „Higher Order Markov Chain Monte Carlo“ (HOMCMC). Beides wird im Folgenden als synonym zu den jeweiligen Fittino-Klassen verwendet.

Der Benutzer des Markov Chain Samplers legt einen Startpunkt im Parameterraum und Fehler auf die Parameter fest. Ausgehend von diesem schlägt der Markov Chain Sampler den nächsten Punkt gemäß einer mehrdimensionalen Normalverteilung zufällig vor, deren Mittelpunkt der Startpunkt ist und deren Standardabweichung in jeder durch die Fehler auf die jeweiligen Parameter gegeben sind. Für den neuen Punkt wird das χ^2_{neu} berechnet und mit dem χ^2 des letzten akzeptierten Punkts verglichen (der Startpunkt ist per Definition akzeptiert). Ist das χ^2 des neuen Punkts niedriger oder gleich dem χ^2 des Startpunkts (das heißt, mit dem neuen Punkt ergibt sich eine bessere oder gleich gute Übereinstimmung zwischen Modellvorhersagen und experimentellen Ergebnissen), so wird der neue Punkt akzeptiert. Andernfalls wird der neue Punkt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p = \exp\left(-\frac{\chi^2_{\text{neu}} - \chi^2_{\text{l.a.p}}}{2}\right) \quad (2.1)$$

akzeptiert [11, 12]. Dabei bezeichnet $\chi^2_{\text{l.a.p}}$ das χ^2 des letzten akzeptierten Punkts. Falls der neue Punkt akzeptiert wird, wird er zum Mittelpunkt der mehrdimensionalen Normalverteilung, gemäß der Punkte durch Zufall vorgeschlagen werden. Falls er nicht akzeptiert wird, bleibt der letzte akzeptierte Punkt das Zentrum der Normalverteilung, gemäß der ein nächster Punkt vorgeschlagen wird. Die Standardabweichung dieser Normalverteilung bleibt erhalten. Ein Punkt wird auch dann nicht akzeptiert, wenn er sich außerhalb von Grenzen befindet, die durch den Benutzer festgelegt werden. Diese sollen sicherstellen, dass die Untersuchung auf einen gewissen Bereich eingeschränkt bleibt. Punkte außerhalb dieser Grenzen werden allerdings vorgeschlagen und ihr χ^2 berechnet, um die *a priori* gewählten Grenzen *a posteriori* zu rechtfertigen oder bei späteren Untersuchungen anders zu wählen. Die genannte Abfolge (Vorschlagen eines neuen Punkts ausgehend vom letzten akzeptierten, Entscheidung über Akzeptanz) kann beliebig oft wiederholt werden.

Der Sinn des Kriteriums für die Akzeptanz besteht darin, den Minimalwert χ^2_{min} zu finden, indem jedes χ^2 mit Sicherheit akzeptiert wird, wenn es niedriger als das χ^2 des letzten akzeptierten Punkts ist. Durch das Kriterium in Gleichung 2.1 wird es allerdings auch ermöglicht, dass auch Punkte mit höherem χ^2 als bereits gefunden untersucht werden. Dies ist wichtig, weil der Parameterraum komplizierte χ^2 -Profile beinhalten kann. Insbesondere sollen neben dem globalen Minimum χ^2_{min} auch Nebenminima gefunden und wieder verlassen werden.

2.4.3 Higher Order Markov Chain Sampler

Der Higher Order Markov Chain Sampler (HOMCMC) ist eine Fittino-Klasse, die alternativ zum MCMC verwendet werden kann. Bei dieser werden Markov-Ketten höherer Ordnung verwendet, um den Parameterraum zu untersuchen. Auf diese Weise soll insbesondere die Kovarianz der Parameter berücksichtigt werden und die Größe der Fehler auf die Parameter an empirische Werte des Parameterraums angepasst werden. Dies soll zu einer noch höheren Effizienz als beim MCMC führen, was im Rahmen dieser Arbeit überprüft wird.

Das Akzeptanz-Kriterium ist beim HOMCMC und MCMC identisch. Der Unterschied besteht darin,

wie neue Punkte vorgeschlagen werden. Der Benutzer legt wie beim MCMC auch den Startpunkt und Unsicherheiten auf die Parameter fest. Darüber hinaus wird die Ordnung n der Kette festgelegt. Anfangs wird das MCMC benutzt, bis n akzeptierte Punkte vorhanden sind. Sobald dies gegeben ist, wird das HOMCMC im eigentlichen Sinne benutzt. Aus den letzten n akzeptierten Punkten wird deren Mittelwert in jeder Dimension gemäß

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

berechnet [26, 27]. Dieser wird benötigt um die Varianz σ^2 auf empirische Weise gemäß

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

zu berechnen [26, 27]. Die empirische Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ zwischen zwei Parametern X und Y berechnet sich gemäß

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}).$$

Sie ist umso größer, je größer die Varianz eines der beiden Parameter ist [26, 27]. Um ein Maß für die Korrelation zwischen zwei Parametern zu erhalten, dessen Größe nicht davon abhängt, wie groß die Varianz eines der Parameter ist, führt man den Korrelationskoeffizienten $\rho_{X,Y}$ zwischen den Größen X und Y ein, der als

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

definiert ist. Empirisch berechnet er sich gemäß

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}.$$

Diese Größen sind in der Kovarianzmatrix enthalten, die in einem n -Dimensionalen Parameterraum folgende Form hat [26, 27]:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1,n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho_{n-1,n}\sigma_{n-1}\sigma_n \\ \rho_{1,n}\sigma_1\sigma_n & \cdots & \rho_{n-1,n}\sigma_{n-1}\sigma_n & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Im HOMCMC wird diese diagonalisiert, bevor ein neuer Punkt im Parameterraum vorgeschlagen wird. Der Vektor, der den letzten akzeptierten Punkt im Parameterraum darstellt, wird in den Eigenraum der Kovarianzmatrix transformiert. Nach der Transformation ist er der Mittelpunkt einer multidimensionalen Normalverteilung, deren Varianzen die Einträge der diagonalisierten Kovarianzmatrix (i. e. deren Eigenwerte) multipliziert mit einem Skalenfaktor sind. Dieser wird vom Benutzer festgelegt. Er wird in dieser Untersuchung immer kleiner als 1 gewählt. Davon verspricht man sich höhere Anteile akzeptierter Punkte, weil dadurch die Breite der Normalverteilung im Eigenraum der Kovarianzmatrix verkleinert werden. Gemäß dieser Normalverteilung wird ein neuer Punkt im Eigenraum vorgeschlagen und in den Parameterraum zurück transformiert. Dort wird nach dem bereits beschriebenen Kriterium entschieden,

ob er akzeptiert wird. Diese Abfolge von Vorschlägen eines neuen Punkts und Entscheidung über dessen Akzeptanz kann ebenfalls beliebig oft wiederholt werden.

Falls Korrelationskoeffizienten von mehr als 0,9 oder weniger als $-0,9$ zwischen zwei Parametern auftreten, werden diese automatisch auf 0,9 bzw. $-0,9$ gesetzt. Dieser Wert kann vom Benutzer auch anders gewählt werden. Die Motivation für diese Wahl ist es, Korrelationskoeffizienten von 1 oder -1 zu vermeiden. Wenn sich dies, und damit eine vollständige (Anti-)Korrelation einstellt, verliert das untersuchte Modell einen Freiheitsgrad; jede Wahl des einen Parameters legt den Wert des anderen vollständig fest. Neue Punkte würden dann nur noch auf einer Hyperebene vorgeschlagen werden, die eine Dimension weniger als der Parameterraum hat. Daher ist es unmöglich, nach einer vollständigen (Anti-)Korrelation den kompletten Parameterraum zu untersuchen. Darüber hinaus treten gravierende numerische Probleme auf, wenn eine solche Korrelation erreicht ist, denn dann ist ein Eigenwert gleich 0, und damit auch die Breite einer Normalverteilung im Eigenraum Kovarianzmatrix. Je höhere Beträge des Korrelationskoeffizienten zugelassen werden, desto kleiner können die Eigenwerte werden und daher die Normalverteilung in einer Dimension des Eigenraums umso schmaler. Mit einer Wahl von 0,9 als Grenze werden sehr geringe Breiten der Normalverteilung ausgeschlossen.

Der Vorteil des HOMCMC besteht zum einen darin, dass die Fehler auf die Parameter nicht vom Benutzer festgelegt werden müssen, sondern sich aus der Form des Parameterraums ergeben. Zum anderen bedeutet die Berücksichtigung der Kovarianz, dass die Dichte vorgeschlagener Punkte an die Form des Parameterraums angepasst wird. Dadurch passt sich die Form der Normalverteilungen, gemäß der neue Punkte vorgeschlagen werden (auch „proposal density functions“ genannt) an das χ^2 -Profil an, zum Beispiel, wenn es eine Achse im Parameterraum gibt, um die das χ^2 niedriger als in der Umgebung ist. Es ist jedoch wichtig, die Einstellungen (das heißt den Skalenfaktor und die Ordnung der Kette) „richtig“ zu wählen. Mit ungünstigen Einstellungen ist es gut möglich, dass das HOMCMC den Parameterraum schlechter als das MCMC untersucht. Daher werden in der zweidimensionalen Untersuchung in Kapitel 3 verschiedene Einstellungen des HOMCMC mit dem MCMC verglichen, insbesondere in Abschnitt 3.4.

Zweidimensionale Untersuchungen

Um einen grundlegenden Eindruck vom Verhalten der verschiedenen Sampler zu erhalten, werden zunächst alle Parameter bis auf M_1 und M_2 festgehalten, sodass ein zweidimensionaler Parameterraum untersucht wird. Auf diese Weise sind die Ergebnisse recht anschaulich und es ist schon bei relativ wenigen Schritten (ungefähr 10^5) zu erwarten, dass der Parameterraum gründlich untersucht wurde. Um mehr Statistik zu erzeugen, werden mehrere Ketten parallel mit demselben Anfangspunkt losgeschickt: Zwölf für den HOMCMC und 20 für den MCMC. Dabei ist zu beachten, dass jeweils vier Ketten des HOMCMC die gleiche Ordnung besitzen, nämlich 100, 300 oder 500, und dass hiervon nur jeweils zwei den gleichen Skalenfaktor besitzen (immer entweder 0,7 oder 0,5), sodass auch hierbei Unterschiede im Verhalten zu erwarten sind und an entsprechender Stelle getrennt betrachtet werden müssen. Zusätzlich wird der Parameterraum mit einigen Ketten 500. Ordnung mit einem Skalenfaktor von 0,3 untersucht.

3.1 Startbedingungen

Da es von Interesse ist, an welchem Punkt im Parameterraum die Markov-Ketten starten und bei welchen Werten die festgehaltenen Parameter in der Untersuchung liegen, wird in Tabelle 3.1 ein Überblick darüber gegeben. Darin ist auch angegeben, wie groß der Fehler auf die jeweiligen Parameter gewählt wurde, was seine Unter- und Obergrenze ist, und ob er festgehalten wurde. Die Bedingungen sind für alle Ketten von MCMC und HOMCMC gleich.

Zudem wird verlangt, dass das Neutralino das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) ist, was es wie schon in Abschnitt 2.2 dargelegt zu einem natürlichen Kandidaten für die dunkle Materie macht.

Der Startpunkt wurde anhand einer vorläufigen Untersuchung des elfdimensionalen Parameterraums ausgewählt, weil das χ^2 an dieser Stelle relativ niedrig ist.

3.2 χ^2 -Profile

Auf diese Weise wurden mit dem MCMC 2555000 Punkte erzeugt und 1712980 mit dem HOMCMC. Zusammen genommen bedeutet das ausreichend viel Statistik für die jeweiligen χ^2 -Profile, die in Abbildung 3.1 zu sehen sind. Darin bildet M_1 die x-Achse, M_2 die y-Achse und das χ^2 die durch Farben dargestellte z-Achse.

Man erkennt, dass für $-400 \text{ GeV} \lesssim M_1 \lesssim -360 \text{ GeV}$ das χ^2 nur schwach von M_2 abhängt, sodass es über einen weiten Bereich in M_2 ($500 \text{ GeV} \lesssim M_2 \lesssim 4000 \text{ GeV}$) nahezu konstant bleibt. Dagegen ist der Bereich mit $M_1 \gtrsim -360 \text{ GeV}$ bzw. $M_2 \lesssim 500 \text{ GeV}$, in dem χ^2 niedrig ist, sehr schmal. Dies lässt auf eine

Parameter	Wert	Fehler	Untergrenze	Obergrenze	Festgehalten?
$M_{\text{input}}/\text{GeV}$	1500	1	-10	10000	ja
M_1/GeV	-375,46	10	-1000	1000	nein
M_2/GeV	1081,07	10	0	4000	nein
M_3/GeV	2349,75	1	-4000	4000	ja
$m_{\tilde{q}_1}/\text{GeV}$	5930,89	1	0	6000	ja
$m_{\tilde{q}_3}/\text{GeV}$	5944,38	1	0	6000	ja
$m_{\tilde{l}_1}/\text{GeV}$	1042,48	1	0	2000	ja
$m_{\tilde{l}_3}/\text{GeV}$	1008,99	1	0	4000	ja
M_A/GeV	2443,84	1	0	4000	ja
A	3291,69	1	-5000	5000	ja
μ	388,83	1	-5000	5000	ja
$\tan\beta$	55,50	1	0	60	ja
m_t/GeV	174,75	1	130	215	ja

Tabelle 3.1: Startbedingungen der zweidimensionalen Untersuchungen. Die Startwerte wurden auf die zweite Nachkommastelle gerundet. Die Fehler auf festgehaltene Größen spielen keine Rolle bei der Untersuchung des Parameterraums.

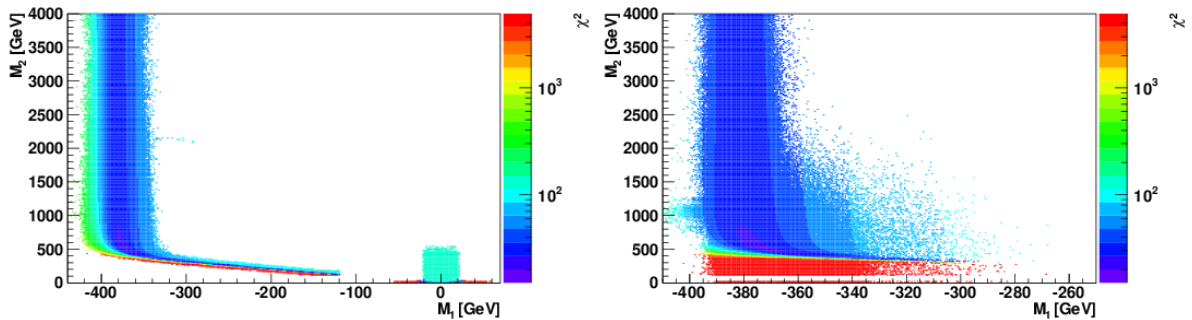


Abbildung 3.1: χ^2 -Profile in Abhängigkeit von M_1 und M_2 , welche hier als einzige Parameter frei variiert wurden. Links die mit dem MCMC erzeugten Punkte, rechts die vom HOMCMC erzeugten. Es sei darauf hingewiesen, dass die x-Achsen der beiden Diagramme anders als die y-Achsen nicht die gleichen Grenzen haben. Während das Maximum in M_2 und das Minimum in M_1 jeweils in etwa gleich sind, wurden vom MCMC auch Punkte mit hohem M_1 und niedrigem M_2 erzeugt, die das HOMCMC nicht erzeugt hat. Auffällig ist, dass die beiden Parameter für $M_1 \gtrsim -360$ GeV (entsprechend $M_2 \lesssim 500$ GeV) sehr stark miteinander korreliert sind, sodass nur ein sehr schmaler Bereich ein niedriges χ^2 enthält. Der Bereich nahe am Nullpunkt wird nur vom MCMC erreicht und hat nur in einem sehr kleinen Teil (für niedrige Werte von M_2) niedrige Werte vom χ^2 . Genau dieser kleine Bereich mit niedrigem χ^2 entsteht nur dadurch, dass in die am LEP gefundene Ausschlussgrenze für die Charginomasse nicht berücksichtigt wurde. Diese ist mit einem Konfidenzniveau von 95% höher als 103,5 GeV [28]. Da allerdings nur sehr wenige Punkte hiervon betroffen sind (1,2% beim MCMC und 2,5% beim HOMCMC) und das Ziel dieser Arbeit keine Aussage zur Bestätigung oder zum Ausschluss des pMSSM11, sondern die Untersuchung des Verhaltens von Markov-Ketten ist, machen diese Punkte keinen bedeutenden Unterschied für diese Arbeit aus. Bei einer Analyse im Hinblick auf die Gültigkeit des pMSSM11 sollte diese Ausschlussgrenze berücksichtigt werden.

starke Korrelation zwischen diesen beiden Parametern schließen. Außerdem stellt sich unmittelbar die Frage, welche Observablen diesen Bereich so stark einschränken.

3.3 Ursache der Einschränkung des Profils für große M_1

Um diese Frage zu beantworten, werden 2000 äquidistante Punkte für ein festgehaltenes M_1 von -310 GeV im Intervall $300 \text{ GeV} \leq M_2 \leq 700 \text{ GeV}$ erzeugt, sodass sich ein scheibenartiger Schnitt durch die Diagramme aus Abbildung 3.1 ergibt, bei dem die Schrittweite $0,2$ GeV beträgt. Für diese Punkte wird der Beitrag zum χ^2 von verschiedenen Observablen aufgetragen. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.2 zu sehen.

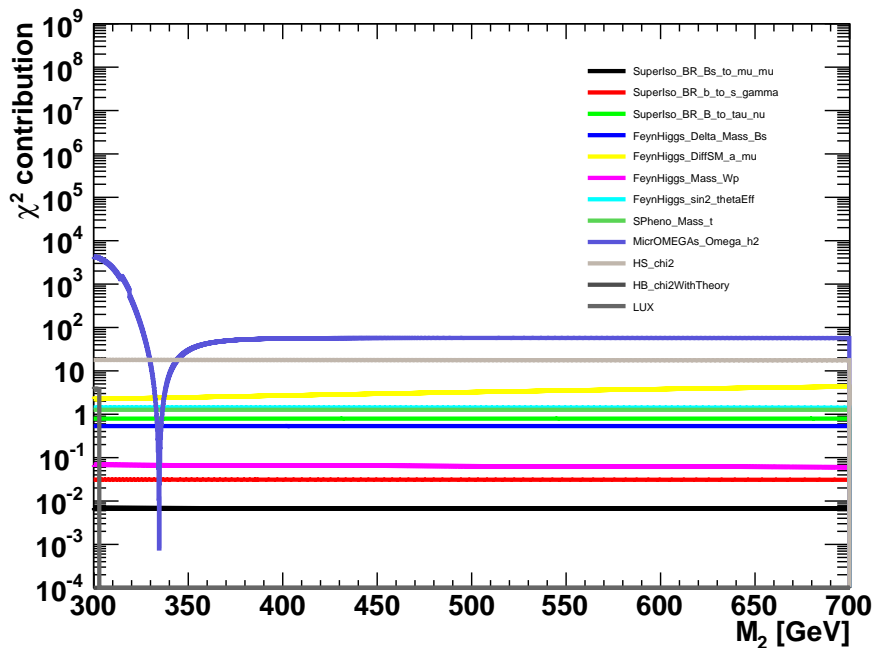


Abbildung 3.2: Die χ^2 -Beiträge der verschiedenen Observablen erklären den schmalen Bereich, auf den M_2 für große M_1 eingeschränkt wird. Auf der y-Achse ist in logarithmischer Darstellung jeder einzelne Beitrag zum Wert vom χ^2 gegen M_2 in GeV auf der x-Achse dargestellt. M_1 ist konstant -310 GeV.

Man erkennt, dass die Observable $\Omega_{\text{CDM}}h^2$, die die Restdichte¹ der dunklen Materie im Universum angibt, fast auf dem gesamten Intervall den dominanten Beitrag zum χ^2 stellt. Nur im Bereich von $330 \text{ GeV} \leq M_2 \leq 350 \text{ GeV}$ bricht ihr Beitrag um bis zu 5 Größenordnungen ein, sodass hier das gesamte χ^2 deutlich geringer ist als in allen anderen Bereichen. Oberhalb dieses Bereichs bleibt der Beitrag von $\Omega_{\text{CDM}}h^2$ konstant bei etwa 60, während er für kleinere Werte von M_2 deutlich größer ist, nämlich bis zu 3000. Im Bereich $330 \text{ GeV} \leq M_2 \leq 350 \text{ GeV}$ dominieren die Observablen, die dem Paket HIGGSIGNALS entstammen, die Beiträge zum χ^2 , im restlichen Bereich ist ihr Beitrag der zweitgrößte. Bemerkenswert

¹ Genau genommen handelt es sich um den kosmologischen Parameter $\Omega_{\text{CDM}} = \rho_{\text{CDM}}/\rho_0$, der als der Quotient aus der Dichte der dunklen Materie ρ_{CDM} und der kritischen Dichte ρ_0 des Universums definiert ist. Diese ist die Dichte, bei der die Expansion des Universums zum Stillstand kommt. Hat das Universum eine niedrigere Dichte, expandiert es ewig, hat es eine höhere Dichte, kehrt sich die Expansion in endlicher Zeit in eine Kontraktion um [8].

ist, dass die Beiträge aller Observablen außer $\Omega_{\text{CDM}}h^2$ nahezu konstant über den gesamten Bereich in M_2 bleiben und somit keinen nennenswerten Beitrag zur Form des χ^2 -Profils leisten.

Eine Darstellung desselben Sachverhalts in nichtlogarithmischer Auftragung, eingeschränkt auf den Bereich des kleinsten Beitrags von $\Omega_{\text{CDM}}h^2$, lässt gut erkennen, dass es sich in der Nähe des Minimums tatsächlich um eine fast parabelförmige Kontur handelt (siehe Abbildung 3.3).

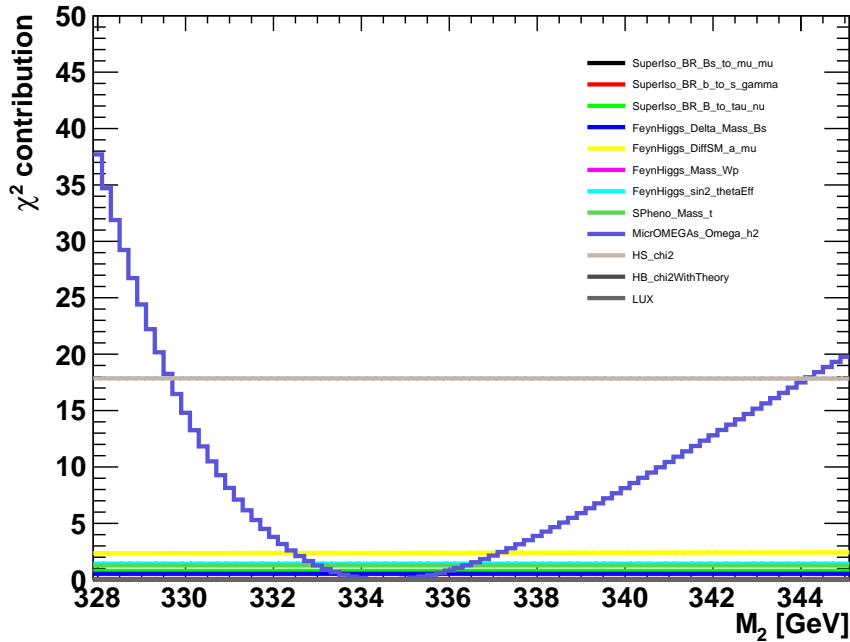


Abbildung 3.3: Nichtlogarithmischer Ausschnitt aus Abbildung 3.2. Man erkennt, dass die Form des χ^2 -Beitrags durch $\Omega_{\text{CDM}}h^2$ näherungsweise parabelförmig ist. Im Bereich $M_2 \gtrsim 340$ GeV ist der Anstieg jedoch eher linear.

Es ist darüber hinaus interessant, ein vergleichbares Diagramm orthogonal dazu für den etwas breiteren Bereich in Abbildung 3.1 zu erstellen, in dem χ^2 kaum von M_2 abhängt. Dazu wird M_2 konstant auf 2500 GeV gehalten und 250 Punkte mit einem Abstand von 0,2 GeV im Intervall $-400 \text{ GeV} \leq M_1 \leq -350 \text{ GeV}$ erzeugt. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

Man erkennt, dass hier das Verhalten (auf einer anderen Skala) qualitativ sehr ähnlich ist. Wieder ist $\Omega_{\text{CDM}}h^2$ die einzige Observable die sich auf diesem Intervall merklich verändert, sodass sie die Form des χ^2 -Profils vorgibt. Die Form dieses Beitrags ist ebenfalls annähernd parabelförmig, wobei sich auch hier rechts vom Minimum ein annähernd linearer Bereich einstellt. Die einzigen anderen Beiträge zu χ^2 , die größer als 3 sind, sind das χ^2 von HIGGSIGNALS mit einem konstanten Wert von 17 (in Abbildung 3.3 erkennt man, dass es dort konstant 18 ist, also über diesen sehr großen Bereich nur minimal variiert) und der mit FEYNHIGGS berechnete Beitrag durch das anormale Magnetische Moment des Myons (welcher hier konstant 9 beträgt; er steigt also über einen sehr großen Bereich mit M_2).

3.4 Effizienzvergleich

Die Effizienz der Untersuchung des Parameterraums wird durch verschiedene Größen charakterisiert, unter anderem der Anteil der akzeptierten Punkte, das minimale $\chi^2 \equiv \chi^2_{\text{min}}$, das gefunden wurde, der

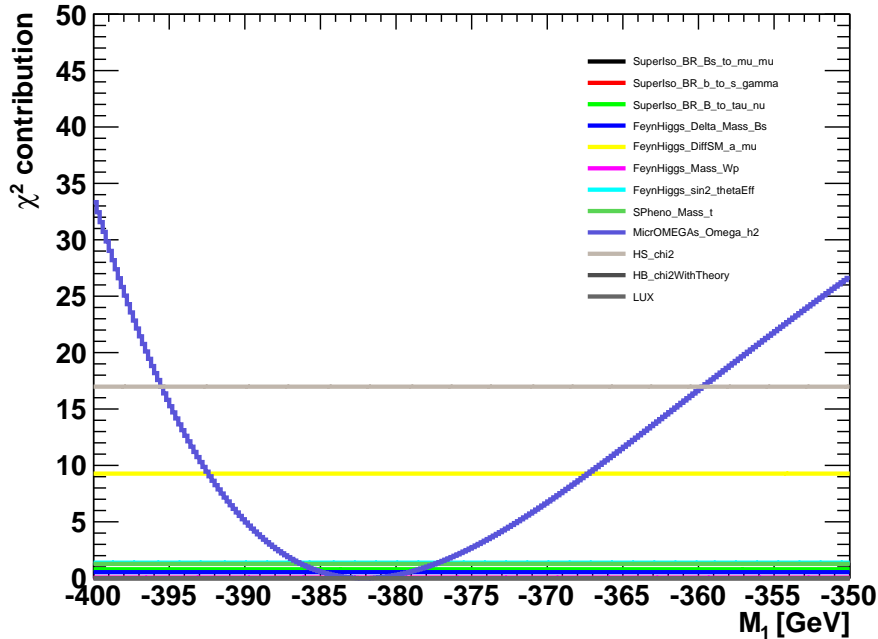


Abbildung 3.4: Beiträge der verschiedenen Observablen zum χ^2 für ein konstantes M_2 von 2500 GeV. M_1 wurde von -400 GeV bis -350 GeV variiert, sodass ein Bereich untersucht wurde, in dem das χ^2 -Profil nur sehr schwach von M_2 abhängt und somit effektiv von M_1 eingeschränkt wird (vgl. Abbildung 3.1).

Anteil der Punkte, für die $\chi^2 < \chi^2 + 1$ bzw. $\chi^2 < \chi^2 + 5,99$ gilt, sowie die Größe der entsprechenden Gebiete im Parameterraum. Für einen Vergleich dieser Größen ist es wichtig, auf der gleichen statistischen Grundlage zu argumentieren. Dies bedeutet, dass man gleich viele und gleich lange Ketten als Grundlage seiner Auswertung benutzen muss. Der Grund liegt vor allem darin, dass die Ketten von ihrem Startpunkt aus mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nach einer begrenzten Anzahl von Schritten das Minimum finden und aus diesem wieder heraus laufen. Eine Betrachtung verschieden langer Ketten kann daher anhand der genannten Kriterien nur schwerlich eine Aussage über die Effizienz treffen, weil beispielsweise eine zu kurze Kette noch nicht ins Minimum gelangt ist. Durch gleich lange Ketten lässt sich dieses Problem vermeiden. Da es möglich ist, dass durch Zufall manche Ketten in verschiedene Regionen des Parameterraums gelangen, ist es wichtig, gleich viele Ketten gemeinsam zu betrachten. Wenn man gleich viele Ketten betrachtet, ist die Wahrscheinlichkeit für jede Einstellung gleich, dass eine unterschiedliche Entwicklung auf dem Zufall basiert, wohingegen intrinsische Unterschiede durch die verschiedenen Gedächtnisgrößen oder verschiedene Skalenfaktoren einen Beitrag leisten sollen. Das wird im folgenden überprüft.

Da nur Ketten gleicher Ordnung mit gleichem Skalenfaktor zusammen betrachtet werden sollten und nur jeweils zwei Ketten des HOMCMC in dieser Kombination übereinstimmen, ergibt sich bei einer Kettenlänge von 130000 Punkten eine statistische Grundlage von 260000 Punkten für diesen Vergleich. Eine Kette 500. Ordnung mit Skalenfaktor 0,7 brach nach 75000 Punkten ab, sodass sich für diese Einstellung nach Kombination mit der anderen Kette mit 145000 Punkten 220000 Punkte als statistische Grundlage ergeben. Hinzu wird eine Analyse genommen, bei welcher der Skalenfaktor von Markov-Ketten 500. Ordnung auf 0,3 gesetzt wurde.

Sampler	MCMC		HOMCMC					
	SF	–	0,3	0,5		0,7		
Ordnung	–	500	100	300	500	100	300	500
N	260000	260000	260000	260000	260000	260000	260000	260000
N _{acc}	87349	187703	186481	149129	141870	133368	120342	102371
akzept. Anteil	0,34	0,72	0,72	0,57	0,54	0,51	0,46	0,47
χ^2_{\min}	24,2	24,5	24,5	24,6	24,5	24,4	24,5	24,6
η_1	0,023	0,033	0,069	0,013	0,008	0,009	0,008	0,008
$\eta_{5,99}$	0,37	0,72	0,77	0,55	0,51	0,51	0,43	0,44
$\eta_{1,acc}$	0,067	0,045	0,094	0,023	0,015	0,017	0,016	0,016
$\eta_{5,99,acc}$	0,85	0,85	0,89	0,75	0,72	0,76	0,68	0,69

Tabelle 3.2: Vergleichswerte der Effizienz von MCMC und HOMCMC verschiedener Ordnung, welche jeweils durch die Zahl in der mit „Ordnung“ bezeichneten Spalte angegeben wird. Unter den Ketten höherer Ordnung ist ferner zwischen verschiedenen Skalenfaktoren SF zu unterscheiden. N ist die Anzahl der untersuchten Punkte, N_{acc} die der akzeptierten. Der Quotient aus beiden ist der akzeptierte Anteil. In den nächsten Zeilen ist der Anteil η aller Punkte aufgelistet, dessen χ^2 um weniger als 1 oder 5,99 oberhalb des minimalen χ^2 aus derselben Punktmenge liegt. Der Index _{acc} bedeutet, dass in diesen Anteil nur akzeptierte Punkte eingehen, das heißt es wird jeweils die Anzahl der akzeptierten Punkte an allen akzeptierten Punkten betrachtet. Alle Dezimalzahlen sind gerundet.

Im Hinblick auf die akzeptierten Punkte ist zu beachten, dass eine Rate von 20% bis 50% akzeptierten Punkte wünschenswert ist. Der akzeptierte Anteil ist daher bei keiner Einstellung zu niedrig, wohl aber bei manchen zu hoch. Insbesondere wenn der Skalenfaktor niedrig ist, werden viele Punkte akzeptiert (bis zu 72%). Dies bestätigt die Annahme aus Abschnitt 2.4.3, dass ein niedriger Skalenfaktor zu hohen Akzeptanzraten führt. Auch ist die Akzeptanzrate umso höher, je niedriger die Ordnung der Markov-Ketten bei jeweils gleichem Skalenfaktor ist. Eine Ausnahme davon sind die Ketten 300. und 500. Ordnung mit Skalenfaktor 0,7. Bei letzteren weicht die Gesamtzahl der Punkte jedoch von den anderen Anzahlen ab, sodass die Aussagekraft dieses Befundes nicht völlig gesichert ist.

Hinsichtlich des minimalen gefundenen Werts vom χ^2 ergibt sich für die verschiedenen Einstellungen kein nennenswerter Unterschied. Etwaige Abweichungen an der ersten Nachkommastelle sind bei den verschiedenen HOMCMC-Einstellungen eher auf den Zufall zurückzuführen. Eine Ausnahme bildet das MCMC, für den χ^2_{\min} mit 24,2 den niedrigsten Wert annimmt. Auch wenn dieser Wert nur 0,2 bis 0,4 unterhalb des Werts vom χ^2_{\min} aus den anderen Einstellungen liegt, ist nicht auszuschließen, dass dieser Punkt dadurch gefunden werden konnte, dass ein weiterer Bereich im Parameterraum untersucht wurde, was man in Abbildung 3.1 und Tabelle 3.3 erkennt.

Die mit Abstand meisten Punkte mit $\chi^2 < \chi^2_{\min} + 1$ wurden mit Markov-Ketten 100. Ordnung mit einem Skalenfaktor von 0,5 erzeugt. Generell scheint eine Abhängigkeit der Art zu bestehen, dass in diesem Intervall umso mehr Punkte erzeugt werden, je geringer der Skalenfaktor und die Ordnung der Kette ist. Ersteres verwundert nicht, weil ein kleiner Skalenfaktor bedeutet, dass der Zufallsgenerator kleine Schritte bestimmt. Die Ordnung der Kette kann insofern einen Einfluss haben, als diese ihre Bewegungsrichtung in einem Gebiet mit einer nicht verschwindenden Korrelation zwischen den beiden Parametern womöglich ihre Bewegungsrichtung umso langsamer ändert, je höher ihre Ordnung ist. Dies kann auch erklären, dass die einfache Markov-Kette mit 0,023 einen verhältnismäßig hohen Anteil an Punkten in diesem Intervall vom χ^2 hat.

Der Anteil der Punkte, die im Intervall $\chi^2 < \chi^2_{\min} + 5,99$ liegen, ist für alle Ketten ähnlich groß wie der Anteil der akzeptierten Punkte. Insgesamt lässt sich auch hier eine Tendenz dazu erkennen, dass eine niedrigere Gedächtnisgröße und ein niedrigerer Skalenfaktor einen größeren Anteil solcher Punkte

bedeuten. Beim MCMC ist der Anteil der Punkte in diesem Intervall mit 0,37 geringer als bei allen HOMCMC-Einstellungen. Dies kann als Hinweis auf eine höhere Effizienz des HOMCMC interpretiert werden.

Insbesondere kann man folgern, dass Markov-Ketten höherer Ordnung das Intervall mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ gleich gut oder besser als einfache Markov-Ketten untersuchen, obwohl diese eine sehr hohe Anzahl an Punkten im Intervall mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ finden. Das bedeutet wahrscheinlich, dass die Ketten höherer Ordnung Nebenminima oder flache Gebiete um das globale Minimum effizienter verlassen. Das ist ein wünschenswertes Verhalten.

Bei ausschließlicher Betrachtung akzeptierter Punkte in denselben χ^2 -Intervallen zeigt sich wieder die Tendenz zu umso höheren Werten, je niedriger die Ordnung der Kette und der Skalenfaktor sind. Die Tatsache, dass die Anteile der akzeptierten Punkte im jeweiligen Intervall an allen akzeptierten Punkten höher als die entsprechenden Anteile ohne Berücksichtigung dieses Kriteriums sind, zeigt, dass Akzeptanz und niedriges χ^2 korreliert sind. Dies ist verständlich, wenn man das Kriterium in Abschnitt 2.4.2 betrachtet, nach dem über das Akzeptieren entschieden wird. Je höher der Wert vom χ^2 über dem Wert $\chi_{\text{l.a.p.}}^2$ des letzten akzeptierten Punkts liegt, desto unwahrscheinlicher ist es, dass dieser Punkt als akzeptiert gewertet wird.

$\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$						
Sampler	Ordnung	SF	$M_{1,\min}$	$M_{1,\max}$	$M_{2,\min}$	$M_{2,\max}$
MCMC	-	-	-373,2	-179,4	187,3	521,1
HOMCMC	500	0,3	-377,1	-329,9	362,3	592,0
HOMCMC	100	0,5	-377,3	-333,9	370,1	597,7
HOMCMC	300	0,5	-377,8	-343,2	385,6	611,6
HOMCMC	500	0,5	-377,0	-331,4	366,3	587,9
HOMCMC	100	0,7	-376,5	-310,3	334,6	576,6
HOMCMC	300	0,7	-377,4	-337,8	378,8	600,4
HOMCMC	500	0,7	-377,6	-338,4	380,1	605,6
$\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$						
Sampler	Ordnung	SF	$M_{1,\min}$	$M_{1,\max}$	$M_{2,\min}$	$M_{2,\max}$
MCMC	-	-	-386,9	-164,0	170,7	2358,0
HOMCMC	500	0,3	-387,2	-329,4	361,2	2679,7
HOMCMC	100	0,5	-387,3	-329,2	359,3	2714,0
HOMCMC	300	0,5	-387,3	-343,0	384,5	2788,5
HOMCMC	500	0,5	-387,2	-325,0	358,6	2668,5
HOMCMC	100	0,7	-387,2	-301,0	320,6	2605,6
HOMCMC	300	0,7	-387,3	-329,2	367,0	2728,5
HOMCMC	500	0,7	-387,3	-336,7	379,4	2757,4

Tabelle 3.3: Intervallgrenzen der Gebiete mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ bzw. $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$. In die Zahlen sind auch nicht akzeptierte Punkte eingegangen, jedoch selbstverständlich keine mit unendlichem χ^2 . Alle Werte von M_1 und M_2 sind in GeV und wurden auf die erste Nachkommastelle gerundet.

Neben den bisherigen Betrachtungen über Anteile von Punkten in gewissen χ^2 -Intervallen ist es auch wichtig zu wissen, wie groß die jeweiligen Bereiche im Parameterraum sind, die diesen Intervallen entsprechen. Die höchsten und niedrigsten Werte der Parameter M_1 und M_2 , die die Bedingung erfüllen, dass $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ bzw. $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ ist, sind in Tabelle 3.3 zu sehen. Hierbei ist χ_{\min}^2 das niedrigste χ^2 in der entsprechenden Gesamtheit von Punkten mit der jeweiligen Einstellung, kann also zwischen den

verschiedenen Einstellungen geringfügig variieren, wie in Tabelle 3.2 zu sehen ist. Vor allem sollte jedoch beachtet werden, dass die Werte $M_{1,2,\min}$ bzw. $M_{1,2,\max}$ keine echten Intervallgrenzen des χ^2 -Profils darstellen, sondern nur den jeweils durch Zufall gefundenen minimalen oder maximalen Wert von einem Punkt, der die Bedingung an das χ^2 erfüllt. Andernfalls dürften die Werte nämlich nur dadurch variieren, dass der Punkt mit dem minimalen χ^2 durch Zufall an verschiedenen Stellen gefunden wurden. Es ist zu erwarten, dass die Werte von $M_{1,2,\min}$ bzw. $M_{1,2,\max}$ sich immer mehr den tatsächlichen Intervallgrenzen nähern, je mehr Punkte erzeugt werden. Es sei daran erinnert, dass die Form des χ^2 -Profils nicht davon abhängt, mit welcher Art von Markov-Ketten der Parameterraum untersucht wurde.

Es fällt auf, dass für beide χ^2 -Intervalle der Wert $M_{1,\min}$ fast identisch ist, was darauf hindeutet, dass niedrige Werte von M_1 intensiv untersucht wurden. Im Hinblick auf $M_{1,\max}$ fallen deutliche Unterschiede auf. Insbesondere das MCMC liegt mit $M_{1,\max} = -179,4$ GeV bzw. $M_{1,\max} = -164,0$ GeV für $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ bzw. $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ deutlich höher als die entsprechenden Werte für die verschiedenen Einstellungen des HOMCMC. Dies lässt sich bereits vermuten, wenn man Abbildung 3.1 betrachtet. Offenbar bewegt sich das MCMC deutlich weiter in den engen, stark antikorrelierten Bereich hinein. Auch die verschiedenen Einstellungen des HOMCMC zeitigen im Hinblick auf $M_{1,\max}$ sehr verschiedene Resultate, die mit Werten von $-343,2$ GeV bis $-310,3$ GeV für $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ bzw. $-343,0$ GeV bis $-301,0$ GeV $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ jedoch eine niedrigere Spanne aufweisen als der Unterschied zwischen MCMC und HOMCMC.

Da bei niedrigen Werten von M_2 bzw. hohen Werten von M_1 die beiden Größen sehr stark antikorreliert sind, ergeben sich für den Wert von $M_{2,\min}$ die gleichen Verhaltensweisen wie für $M_{1,\max}$. Je höher letzteres für eine Einstellung ist, desto niedriger ist ersteres. Wiederum sind die Werte für $M_{2,\min}$ beim MCMC mit großem Abstand am niedrigsten.

Im Bereich, wo M_2 hoch ist, ist keine besonders enge Korrelation zwischen M_1 und M_2 zu erkennen. Trotzdem gilt auch hier, dass $M_{2,\max}$ umso höher ist, je niedriger $M_{1,\min}$ ist, es liegt also auch hier eine gewisse Antikorrelation vor, auch wenn diese aus Abbildung 3.1 nicht so leicht zu erkennen ist wie die Korrelation zwischen $M_{2,\min}$ und $M_{1,\max}$. Das χ^2 -Profil ist also auch hier nicht ganz senkrecht zur x-Achse. Die Tatsache, dass sich die Antikorrelation für das Intervall mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ besser erkennen lässt als für das mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$, lässt darauf schließen, dass sich das Tal im χ^2 -Profil allmählich einer Senkrechten zur x-Achse annähert, sodass minimale Variationen in M_1 (zum Beispiel 0,1 GeV) eine große Differenz in M_2 bedeuten können. Neben eher geringfügigen Schwankungen von $M_{2,\max}$ für verschiedene HOMCMC-Einstellungen fällt auf, dass dieser Wert beim MCMC deutlich niedriger ist. Allerdings ist die Diskrepanz relativ zum Betrag von M_2 im Allgemeinen niedriger als bei M_1 .

Generell zeigt sich, dass der jeweilige Bereich von M_2 deutlich größer ist als der von M_1 , das χ^2 -Profil ist also flacher in dieser Größe. Dies lässt sich aus Abbildung 3.1 erkennen und anhand der Zahlen in Tabelle 3.3 quantifizieren.

Zusätzlich zum generellen Vergleich der Effizienz von MCMC und HOMCMC ist es von Interesse zu betrachten, wie sie sich im sehr schmalen Bereich im χ^2 -Profil verhält (in dem M_1 und M_2 stark korreliert sind, wie in Abschnitt 3.5 dargelegt wird). Dazu werden die gleichen Kriterien wie bisher in diesem Abschnitt auf die gleichen Ketten angewandt, nur dass solche Punkte, bei denen $M_1 < -350$ GeV ist, völlig ignoriert werden, sodass der schmale Bereich übrig bleibt. Auf diese Weise ergibt sich generell eine kleinere und jeweils unterschiedliche Anzahl an betrachteten Punkten. Die sich ergebenden Werte sind in Tabelle 3.4 zu sehen. Die Wahl der Grenze von -350 GeV erscheint angesichts von Abbildung 3.1 ein wenig zu niedrig, weil sich das χ^2 -Profil insbesondere beim MCMC erst bei ein wenig höheren Werten von M_1 einengt. Aus der dort gewählten Art der Darstellung lässt sich allerdings nicht erkennen, ob viele oder wenige Punkte in einem Bin liegen. Bei höheren Grenzen ergibt sich außerdem recht das Problem, dass immer weniger Punkte vorliegen, je höher die Grenze gewählt wird. Bei einigen Einstellungen des HOMCMC sind bereits bei der gewählten Grenze von -350 GeV nur recht wenige Punkte vorhanden

Sampler	MCMC	HOMCMC		
SF	–	0,3	0,5	0,5
Ordnung	–	500	100	300
N	44633	3979	1731	885
N _{acc}	5341	158	283	16
akzept. Anteil	0,120 ± 0,002	0,040 ± 0,003	0,163 ± 0,009	0,018 ± 0,005
χ^2_{\min}	24,2	24,5	24,5	24,6
η_1	0,060 ± 0,002	0,023 ± 0,003	0,099 ± 0,008	0,011 ± 0,004
$\eta_{5,99}$	0,179 ± 0,002	0,067 ± 0,004	0,239 ± 0,011	0,027 ± 0,005
$\eta_{1,acc}$	0,480 ± 0,007	0,54 ± 0,04	0,58 ± 0,03	0,56 ± 0,13
$\eta_{5,99,acc}$	0,959 ± 0,003	0,96 ± 0,02	0,97 ± 0,01	1,00
Sampler	HOMCMC			
SF	0,5	0,7	0,7	0,7
Ordnung	500	100	300	500
N	4193	6399	2016	1299
N _{acc}	50	57	16	12
akzept. Anteil	0,012 ± 0,002	0,009 ± 0,002	0,008 ± 0,002	0,009 ± 0,003
χ^2_{\min}	24,5	24,4	24,5	24,6
η_1	0,005 ± 0,001	0,004 ± 0,001	0,004 ± 0,002	0,005 ± 0,002
$\eta_{5,99}$	0,019 ± 0,002	0,013 ± 0,002	0,012 ± 0,003	0,019 ± 0,004
$\eta_{1,acc}$	0,42 ± 0,07	0,47 ± 0,07	0,50 ± 0,13	0,58 ± 0,15
$\eta_{5,99,acc}$	0,88 ± 0,05	0,98 ± 0,02	0,88 ± 0,09	1,00

Tabelle 3.4: Die gleichen Effizienzkriterien wie in Tabelle 3.2, angewandt auf die gleichen Punkte mit der Bedingung, dass $M_1 > -350$ GeV sein muss. Wegen der geringen Punktzahlen, auf die sie sich beziehen, sind Fehler auf alle Anteile ausgerechnet worden. Der Wert vom χ^2_{\min} wurde auf die erste Nachkommastelle gerundet.

(vgl. Tabelle 3.4). Wären diese Anzahlen noch geringer, würden die Unsicherheiten darauf im Verhältnis zum absoluten Wert größer.

Das minimale gefundene χ^2 von allen Punkten befindet sich offenbar im Bereich mit $M_1 > -350$ GeV, denn die entsprechenden Werte sind in Tabelle 3.2 und 3.4 identisch. Die gefundene Gesamtzahl an Punkten in diesem Bereich nimmt sehr unterschiedliche Werte an. Während das MCMC mit Abstand die meisten Punkte (44633) in diesem Gebiet gefunden hat, ergeben sich mit den verschiedenen HOMCMC-Einstellungen Anzahlen von 885 bis 6399, die jedoch nur schwerlich in eine Regelmäßigkeit einzuordnen sind. Weder lässt sich mit Sicherheit eine Korrelation zwischen der Anzahl und der Ordnung der Kette noch zwischen der Anzahl und dem Skalenfaktor herstellen. Man muss davon ausgehen, dass statistische Fluktuationen hier eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen.

Da alle Anteile auf der Grundlage von relativ kleinen Gesamtzahlen N und noch kleineren Anzahlen an akzeptierten Punkten N_{acc} berechnet wurden, sind die Fehler anders als in Tabelle 3.2 nicht mehr grundsätzlich zu vernachlässigen und wurden mit angegeben. Der Fehler $\Delta\eta$ auf einen Anteil η wurde gemäß

$$\Delta\eta = \sqrt{\frac{\eta \cdot (1 - \eta)}{n}}$$

berechnet, wobei n die Anzahl der jeweiligen Punkte, also N oder N_{acc} ist. Dies ist nur eine Näherung, die insbesondere bei kleinen Werten von η sehr grob und bei $\eta = 1,00$ selbstverständlich nicht gültig

ist. Gerade bei den niedrigeren Punktzahlen, die in Tabelle 3.4 vorliegen, ergeben sich Fehler, die berücksichtigt werden sollten. Insgesamt lässt sich jedoch sagen, dass keiner der Fehler so hoch ist, das das Ergebnis an Aussagekraft verliert.

Der Anteil an akzeptierten Punkten im Bereich mit $M_1 > -350$ GeV ist in allen Fällen deutlich niedriger als bei Berücksichtigung aller Punkte und niedriger als erwünscht. Der Wert ist beim MCMC mit 12% deutlich höher als bei allen Einstellungen von Markov-Ketten höherer Ordnung, mit Ausnahme von Ketten 100. Ordnung mit einem Skalenfaktor von 0,5. Bei diesen liegt ein Anteil von 16,3% vor, wohingegen bei allen anderen Einstellungen maximal 4% (zumeist jedoch weniger als 2%) der Punkte akzeptiert werden. Generell scheint der Anteil umso höher zu sein, je niedriger der Skalenfaktor und die Ordnung der Kette sind.

In Bezug auf den Anteil an Punkten, deren Wert vom χ^2 kleiner als der Minimalwert + 1 ist, bietet sich ein ähnliches Bild. Die Markov-Ketten 100. Ordnung mit Skalenfaktor 0,5 erreichen den höchsten Wert (9,9%), danach kommen einfache Markov-Ketten (6,0%), wohingegen die anderen weit darunter liegen. Diese beiden Höchstwerte sind höher als in Tabelle 3.2, wohingegen es sich für die anderen Werte umgekehrt verhält. Dass der akzeptierte Anteil umso höher ist, je höher der Anteil an Punkten mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ ist, liegt daran, dass diejenigen Markov-Ketten, die in einem sehr flachen Bereich im χ^2 -Profil bei $M_1 > -350$ GeV bleiben, auf diese Weise die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt akzeptiert wird, sehr hoch halten.

Die Anteile der Punkte, bei denen $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ ist, verhalten sich genau wie diejenigen, bei denen $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ ist, was sicherlich dieselbe Ursache hat. Allerdings sind sie immer niedriger als in Tabelle 3.2, weil die Werte vom χ^2 abseits des Minimums bei Werten von $M_1 > -350$ GeV steiler ansteigen als in den Bereichen, wo sich ein breiteres Tal im χ^2 -Profil ausbildet, zum Beispiel bei hohen Werten von M_2 (vgl. Abbildung 3.1).

Bemerkenswert ist, dass bei allen Einstellungen fast jeder zweite akzeptierte Punkt Werte vom $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ und fast jeder Werte vom $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ hat. Der Anteil ist somit deutlich höher als ohne Einschränkungen bezüglich M_1 . Dies liegt daran, dass nah am absoluten Minimum akzeptierte Punkte (die umso seltener sind, je höher der Wert vom χ über dem Wert des letzten akzeptierten Punkts liegt) nur selten deutlich über dem Minimalwert vom χ^2 liegen können. Es sollte hierbei allerdings bedacht werden, dass die Anzahl akzeptierter Punkte mit $M_1 > -350$ GeV sehr gering ist, was größere Unsicherheiten bedeutet.

Analog zu den Werten in Tabelle 3.3 ist es von Interesse zu betrachten, wie weit die Intervalle in M_1 und M_2 , sind, für die $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ bzw. $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ gilt, wenn nur Punkte mit $M_1 > -350$ GeV betrachtet werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.5 zu sehen. Es sei darauf hingewiesen, dass wie bei Tabelle 3.3 keine wirklichen Intervallgrenzen, sondern nur der höchste und niedrigste gefundene Wert als Maximal- und Minimalwert bezeichnet werden, und dass alle Werte auf die erste Nachkommastelle gerundet sind.

Die Werte von $M_{1,\min}$ haben keine Aussagekraft, weil sie sich aus der Bedingung ergeben, die anfangs an die Werte von M_1 gestellt wurde. Da der Wert vom χ_{\min}^2 mit und ohne Bedingung an M_1 derselbe ist, müssen die Werte von $M_{1,\min}$ in den entsprechenden χ^2 -Intervallen weiterhin dieselben wie in Tabelle 3.3 sein. Die Maximalwerte $M_{1,\max}$ sind ebenfalls identisch, weil sie durch die Bedingung an M_1 nicht beeinflusst werden.

Da M_1 und M_2 stark miteinander korreliert sind wird der Wert von $M_{2,\min}$ durch diese Bedingung ebenfalls nicht verändert. Der Wert von $M_{2,\max}$ wiederum wird ebenfalls durch die Bedingung festgelegt, dass $M_1 > -350$ GeV sein muss. Es gibt Punkte in den entsprechenden χ^2 -Intervallen, in denen M_2 höher ist, doch bei diesen ist $M_1 < -350$ GeV, sodass diese in Tabelle 3.5 nicht berücksichtigt werden.

Insgesamt scheinen die Ketten 100. Ordnung mit seinem Skalenfaktor von 0,5 den stark korrelierten Teil des Paramerraums besonders effizient zu untersuchen, doch sie sind im Rahmen dieser Unter-

$\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$						
Sampler	Ordnung	SF	$M_{1,\min}$	$M_{1,\max}$	$M_{2,\min}$	$M_{2,\max}$
MCMC	-	-	-350,0	-179,4	187,3	406,8
HOMCMC	500	0,3	-350,0	-329,9	362,3	407,4
HOMCMC	100	0,5	-350,0	-333,9	370,1	406,8
HOMCMC	300	0,5	-349,8	-343,2	385,6	407,1
HOMCMC	500	0,5	-349,8	-331,4	366,3	407,3
HOMCMC	100	0,7	-349,9	-310,3	334,6	407,4
HOMCMC	300	0,7	-347,6	-337,8	378,8	400,6
HOMCMC	500	0,7	-349,7	-338,4	380,1	400,4
$\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$						
Sampler	Ordnung	SF	$M_{1,\min}$	$M_{1,\max}$	$M_{2,\min}$	$M_{2,\max}$
MCMC	-	-	-350,0	-164,0	170,7	418,0
HOMCMC	500	0,3	-350,0	-329,4	361,2	416,9
HOMCMC	100	0,5	-350,0	-329,2	359,3	416,5
HOMCMC	300	0,5	-349,8	-343,0	384,5	417,7
HOMCMC	500	0,5	-349,8	-325,0	358,6	413,3
HOMCMC	100	0,7	-349,9	-301,0	320,6	413,3
HOMCMC	300	0,7	-349,9	-329,2	367,0	417,8
HOMCMC	500	0,7	-350,0	-336,7	379,4	414,1

Tabelle 3.5: Intervallgrenzen der Gebiete mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ bzw. $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$, angewandt auf Punkte, bei denen $M_1 > -350$ GeV ist. Alle Werte von M_1 und M_2 sind in GeV und wurden auf die erste Nachkommastelle gerundet.

suchung nicht so weit wie das MCMC in diesen Bereich vorgedrungen zu sein. Es ist gut möglich, dass sich die Form der mehrdimensionalen Normalverteilung, nach der Punkte vorgeschlagen werden, besser an die Form des χ^2 -Profils anpasst, wenn der Startpunkt in diesem Bereich gewählt wird. Für diese Untersuchung stand nicht genug Zeit zur Verfügung, um dies zu überprüfen. Bei einer späteren Untersuchung sollte diese Möglichkeit jedoch in Betracht gezogen werden. Für eine vollständigere Untersuchung des gesamten Parameterraums sollten die Ketten am besten in verschiedenen Bereichen des Parameterraums starten, um besser auf die verschiedenen Konturen des χ^2 -Profils eingestellt zu sein.

3.5 Korrelation zwischen M_1 und M_2

Bereits am Anfang der Analyse (in Abschnitt 3.2) wurde angesichts der Diagramme in Abbildung 3.1 die Vermutung geäußert, dass die beiden Parameter in diesem Bereich stark miteinander antikorreliert sein müssen. Dies soll nun auf zwei Weisen überprüft werden. Zum einen wird der vom HOMCMC berechnete, empirische Korrelationskoeffizient der beiden Größen M_1 und M_2 mit und ohne Einschränkungen an einen der Parameter gegen die Iteration aufgetragen. Da der Bereich starker Korrelation den niedrigsten Werten von M_2 bzw. den höchsten von M_1 entspricht, ist eine Einschränkung des Intervalls durch eine Obergrenze für M_2 oder eine Untergrenze für M_1 ein gutes Kriterium, um die Bereiche, in denen starke Korrelation erwartet wird oder nicht, zu unterscheiden. Zum anderen wird der Korrelationskoeffizient gegen die jeweiligen Parameter aufgetragen, sodass sich ein direkter Zusammenhang erkennen lassen sollte.

Zunächst zur Methode, bei der eine Bedingung an die Werte einer Variablen gestellt wird. Hierbei

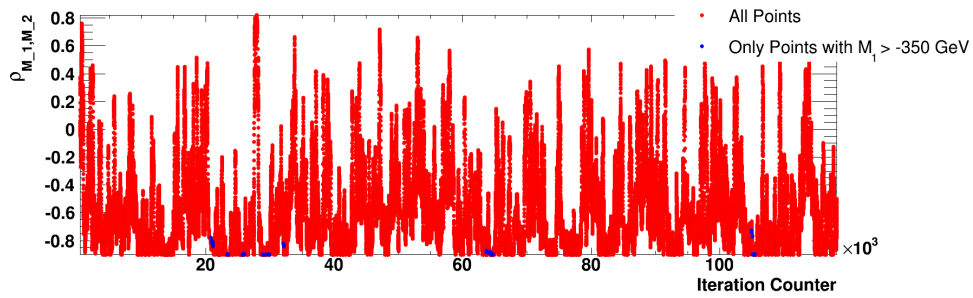


Abbildung 3.5: Korrelationskoeffizient $\rho(M_1, M_2)$ des HOMCMC gegen die Iteration aufgetragen für eine Kette 100. Ordnung. In rot sind alle Werte dargestellt, in blau nur diejenigen, für die M_1 größer als -350 GeV ist. Man erkennt, dass letztere eine starke Antikorrelation aufweisen.

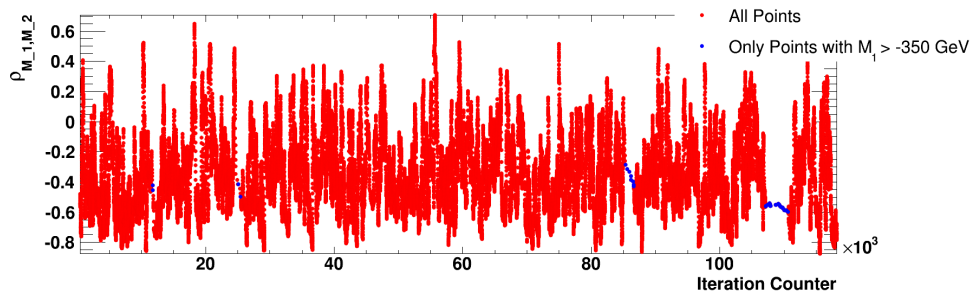


Abbildung 3.6: Zum Vergleich: Korrelationskoeffizient $\rho(M_1, M_2)$ des HOMCMC gegen die Iteration aufgetragen für eine weitere Kette 100. Ordnung. In rot sind alle Werte dargestellt, in blau nur diejenigen, für die M_1 größer als -350 GeV ist. Man erkennt, dass letztere eine bemerkenswerte Antikorrelation aufweisen, die jedoch nicht so stark ist wie in Abbildung 3.5

bietet es sich an, M_1 auszuwählen, weil sich bei dieser Variablen der vermutlich stark korrelierte Schweif besser sichtbar vom weniger stark korrelierten Gebiet abtrennen lässt. Die Untergrenze der Werte, die separat dargestellt werden, wird als -350 GeV gewählt.

Das Ergebnis ist in Abbildung 3.5 zu sehen. Für alle Punkte einer Kette 100. Ordnung wurde der Korrelationskoeffizient $\rho(M_1, M_2)$ zwischen den beiden Parametern gegen die Schrittzahl der Kette rot aufgetragen. In Blau sind nur diejenigen Punkte aufgetragen, an denen $M_1 > -350$ GeV ist. Für diese relativ restriktive Bedingung sind nur sehr wenige Punkte vorhanden. Dennoch kann man erkennen, dass bei dieser Kette diese Punkte eine starke Antikorrelation aufweisen, typischerweise gilt $\rho(M_1, M_2) < -0,8$. Da der Korrelationskoeffizient relativ stark schwankt, ist ersichtlich, dass die Darstellung mehrerer Ketten in einem Diagramm sehr unübersichtlich ist. Qualitativ sieht der Verlauf jeder Kette relativ ähnlich aus, nicht immer ist die Antikorrelation bei Punkten mit $M_1 > -350$ GeV so stark wie in diesem Beispiel, was man in Abbildung 3.6 sieht. Doch auch in diesem Beispiel ist die Antikorrelation nicht unerheblich.

Da sich die Frage stellt, ob sich der Korrelationskoeffizient für Ketten höherer Ordnung anders verhält als die bisher betrachteten, wurde in Abbildung 3.7 ein entsprechendes Diagramm dargestellt. Man sieht, dass die Schwankungen nicht innerhalb so weniger Schritte wie in Abbildung 3.5 und 3.6 ablaufen. Abgesehen davon ist das Verhalten qualitativ allerdings gleich. Insbesondere ist auch hier eine moderate Antikorrelation zwischen den beiden Parametern zu erkennen. An den aufeinanderfolgenden blauen Punkten erkennt man, dass die Antikorrelation immer stärker wird, je länger sich die Kette im Bereich mit $M_1 > -350$ GeV aufhält. Sie verlässt diesen Bereich allerdings, bevor eine extreme

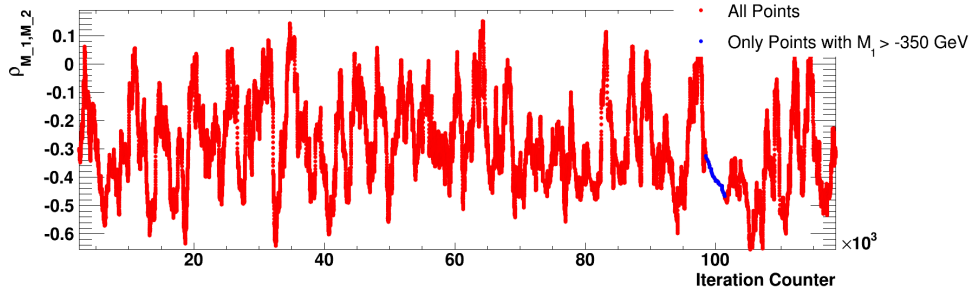


Abbildung 3.7: Analog zu Abbildung 3.5 und 3.6 wurde der Korrelationskoeffizient des HOMCMC gegen die Iterationszahl in einer Kette 500. Ordnung aufgetragen. Man erkennt, dass er nicht so schnell variiert, ansonsten jedoch ein sehr ähnliches Verhalten zeigt.

Antikorrelation erreicht ist. Sobald die Kette wieder Punkte mit $M_1 < -350$ GeV erreicht, sinkt der Betrag des Korrelationskoeffizienten, das heißt sie verlässt den Bereich starker Antikorrelation.

Generell sieht man in Abbildung 3.5, 3.6 und 3.6, dass nur wenige Punkte in dem Bereich gefunden wurden, in dem M_1 größer als -350 GeV ist.

Eine direktere Analyse, die den Vorteil bietet, dass hierbei alle Ketten auf einmal betrachtet werden können, ist in Abbildung 3.8 zu sehen. Ein Parameter (M_1 oder M_2) ist auf der x-Achse aufgetragen, der Korrelationskoeffizient $\rho(M_1, M_2)$ bildet die y-Achse. Auf der z-Achse sind durch Farben die Anzahl der im Parameterraum untersuchten Punkte in einem Kästchen dargestellt. Die runden Punkte stellen den Durchschnitt von $\rho(M_1, M_2)$ in einem Bin der x-Achse dar, sodass für kleine Intervalle von M_1 oder M_2 der durchschnittliche Korrelationskoeffizient zu erkennen ist. Die Grundlage dieser Abbildung sind alle Ketten mit einem Skalenfaktor von 0,5 oder 0,7.

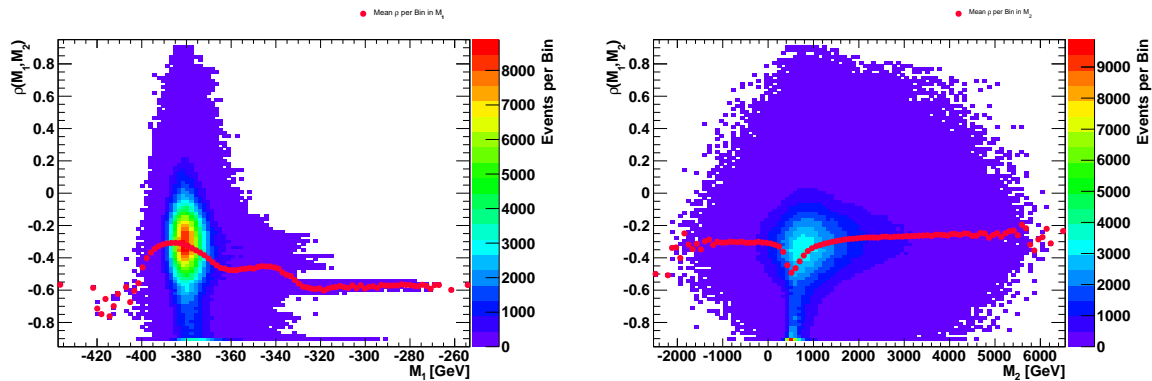


Abbildung 3.8: Der Korrelationskoeffizient $\rho(M_1, M_2)$ des HOMCMC (y-Achse) gegen einen Parameter auf der x-Achse aufgetragen (links M_1 , rechts M_2). Die Farben stellen die Anzahl der untersuchten Punkte im Parameterraum mit den entsprechenden Werten dar. Die runden Punkte im Diagramm stellen den Mittelwert des Korrelationskoeffizienten im entsprechenden Intervall des Parameters dar. Man erkennt sehr gut, dass der schmale Bereich im χ^2 -Profil (entsprechend $M_1 \gtrsim -350$ GeV bzw. $200 \text{ GeV} \lesssim M_2 \lesssim 1000$ GeV) jeweils sehr starken Antikorrelationen entspricht.

Das Ergebnis lässt keinen Zweifel daran, dass die Antikorrelation im Bereich $M_1 \gtrsim -350$ GeV bzw. $200 \text{ GeV} \lesssim M_2 \lesssim 1000$ GeV merklich gegeben ist. Diese Betrachtungsweise hat die erfreuliche Eigenschaft, dass hier der Durchschnitt des Korrelationskoeffizienten unmittelbar gesehen werden kann und nicht einzelne Punkte von Beispielketten betrachtet werden müssen.

Siebendimensionale Untersuchungen

Für die Untersuchung eines siebendimensionalen Parameterraums werden die Parameter M_1 , M_2 , $\tan\beta$, μ , $M_{\tilde{t}_1}$, $M_{\tilde{t}_3}$ und M_A variiert, während die anderen weiterhin festgehalten werden. Somit werden im Wesentlichen elektroschwache Phänomene untersucht, wohingegen der stark koppelnde Sektor ausgeklammert wird. Es werden jeweils 20 Markov-Ketten mit dem MCMC und 20 mit dem HOMCMC eingesetzt, deren Länge nur durch die Rechenleistung und die zur Verfügung stehende Zeit eingeschränkt wurde. Anders als bei der zweidimensionalen Untersuchung ist die Einstellung des HOMCMC bei allen Ketten gleich, nämlich als Kette 500. Ordnung mit Skalenfaktor 0,7. Auf diese Weise wurden 3530000 Punkte mit dem MCMC und 2660000 mit dem HOMCMC erzeugt. Obwohl dies jeweils mehr Punkte als im zweidimensionalen Fall sind, ist die Dichte der Untersuchung in diesem Fall weitaus niedriger, weil das zu einer Einheitslänge x korrespondierende Raumvolumen gemäß x^d wächst, wobei d die Anzahl der Dimensionen ist. Daher bräuchte man in sieben Dimensionen $m^{7/2}$ Punkte, um die gleiche Dichte wie bei einer zweidimensionalen Untersuchung zu erlangen, wenn m die Anzahl der Punkte ist, mit der diese zwei Dimensionen untersucht wurden. Dies wären $2,67 \cdot 10^{22}$ bzw. $6,58 \cdot 10^{21}$ Punkte für MCMC bzw. HOMCMC, wenn man die gleiche Dichte wie bei den Untersuchungen in Kapitel 3 erreichen wollte. Dabei wurde noch nicht berücksichtigt, dass die untersuchten Intervalle von M_1 und M_2 im siebendimensionalen Fall sogar deutlich größer als im zweidimensionalen Fall sind. Es ist zwar davon auszugehen, dass eine solch hohe Dichte mit einer solch immensen Anzahl von Punkten nicht nötig ist, um den Parameterraum zu untersuchen, vorausgesetzt die Fehler auf die Parameter sind groß genug. Dennoch sind Zweifel daran angebracht, ob die Untersuchungen den Parameterraum gut abdecken. Dies wird in den nächsten Abschnitten überprüft.

4.1 Startbedingungen

In Tabelle 4.1 findet sich ein Überblick über die Startbedingungen, die in dieser Untersuchung gewählt wurden. Der Startpunkt ist für MCMC und HOMCMC identisch, nur die Größe des Fehlers wurde verschieden gewählt. Daher gelten alle Spalten für beide Sampler, außer der Fehler, bei dem explizit angegeben ist, ob er sich auf MCMC oder HOMCMC bezieht. Abgesehen von den Fehlern ist der Startpunkt darüber hinaus identisch mit dem der zweidimensionalen Untersuchung, bei der jedoch alle Parameter außer M_1 und M_2 festgehalten werden (vgl. Tabelle 3.1).

Auch hier wird gefordert, dass ein Neutralino das leichteste supersymmetrische Teilchen ist.

Parameter	Wert	Fehler		Untergrenze	Obergrenze	Festgehalten?
		MCMC	HOMCMC			
$M_{\text{input}}/\text{GeV}$	1500	1	1	-10	10000	ja
M_1/GeV	-375,46	10	20	-1000	1000	nein
M_2/GeV	1081,07	10	20	0	4000	nein
M_3/GeV	2349,75	1	1	-4000	4000	ja
$m_{\tilde{q}_1}/\text{GeV}$	5930,89	1	1	0	6000	ja
$m_{\tilde{q}_3}/\text{GeV}$	5944,38	1	1	0	6000	ja
$m_{\tilde{l}_1}/\text{GeV}$	1042,48	10	20	0	2000	nein
$m_{\tilde{l}_3}/\text{GeV}$	1008,99	10	20	0	4000	nein
M_A/GeV	2443,84	25	50	0	4000	nein
A	3291,69	1	1	-5000	5000	ja
μ	388,83	30	50	-5000	5000	nein
$\tan\beta$	55,50	1	2	0	60	nein
m_t/GeV	174,75	1	1	130	215	ja

Tabelle 4.1: Startbedingungen der siebendimensionalen Untersuchungen. Die Startwerte sind auf die zweite Nachkommastelle gerundet. Während alle Startwerte von Parametern, sowie ihre Unter- und Obergrenzen für alle Ketten gleich gewählt wurden, wurden die Fehler auf die nicht festgehaltenen Größen beim HOMCMC größer gewählt. Daher werden sie für den MCMC und den HOMCMC getrennt angegeben.

4.2 χ^2 -Profile

Da der Wert vom χ^2 nicht in einem Diagramm in Abhängigkeit von allen sieben Parametern zugleich dargestellt werden kann, wird jeweils eine Projektion auf einen Parameter dargestellt. Falls die Untergrenze des χ^2 -Profils zu beiden Rändern hin ansteigt, deutet das darauf hin, dass der Parameterraum in Abhängigkeit von diesem Parameter gut untersucht wurde, weil ein Minimum gefunden wurde, um das herum das χ^2 -Profil ansteigt. Man weiß in einem solchen Fall jedoch nicht immer, ob es sich beim gefundenen Minimum nur um ein lokales und nicht globales in diesem Parameter handelt, weil sich dieses außerhalb des untersuchten Intervalls befindet und wegen einer Barriere mit hohem χ^2 nicht erreicht wurde. Dies lässt sich jedoch ausschließen, wenn das Histogramm einen Bereich abdeckt, der sich (ungefähr) mit den Grenzen deckt, die einem Parameter in der Eingabedatei (per Annahme) gesetzt werden. Ein anderes Problem ist das fehlende Wissen darüber, ob für einen festen Wert eines Parameters ein niedrigerer Wert vom χ^2 als der niedrigste gefundene gefunden werden kann, wenn die anderen Parameter eine passende Kombination haben. Da dies jedoch für jeden Punkt in eines Parameters gilt, ist das Finden eines niedrigeren Werts als des vorhandenen in jedem Teilintervall gleich wahrscheinlich – vorausgesetzt, in jedem Teilintervall gibt es gleich viele Punkte, was selbstverständlich nicht gegeben ist. Dennoch ist bei ausreichender Statistik nicht davon auszugehen, dass durch das zufällige Finden einiger weniger Punkte das χ^2 -Profil wesentlich verformt wird.

In Abbildung 4.1 ist die Projektion des χ^2 -Profils auf M_1 als Beispiel für eine Dimension dargestellt, das heißt χ^2 auf der y-Achse ist gegen M_1 auf der x-Achse aufgetragen. Zusätzlich ist auf der z-Achse durch Farben dargestellt, wie viele Punkte in einer Kombination von kleinen Intervallen der beiden Parameter vorhanden sind. Der Bereich mit negativem M_1 wurde recht intensiv untersucht. Die Untergrenze des χ^2 -Profils ist im Bereich zwischen -400 GeV und -120 GeV sehr flach. Während ihr Anstieg bis zu Werten von $M_1 \approx -1300$ GeV sehr moderat ist, scheint der Bereich $-100 \text{ GeV} \lesssim M_1 \lesssim 100 \text{ GeV}$ sehr hohe Werte vom χ^2 zu enthalten. Ob das Profil symmetrisch unter einer Spiegelung an der y-Achse ist, lässt sich aufgrund der sehr geringen Anzahl an Punkten mit positivem M_1 nicht beurteilen.

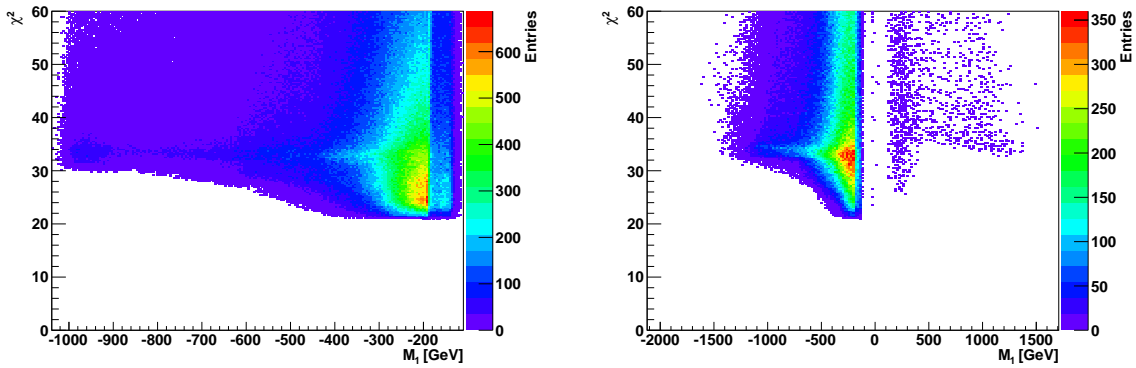


Abbildung 4.1: Projektion der χ^2 -Profile auf den Parameter M_1 . Die farbig dargestellte z-Achse gibt an, wie viele Punkte in jeweiligen Kästchen vorliegen. Links das Ergebnis des MCMC, rechts des HOMCMC. Man erkennt, dass letzterer ein deutlich größeres Intervall in M_1 untersucht hat und auch in den positiven Bereich von M_1 vorgedrungen ist. Um einen Wert von 0 GeV herum scheint eine sehr hohe Barriere im χ^2 -Profil zu sein, die das MCMC nicht überwunden hat, weil die Unsicherheiten auf die Parameter nicht groß genug angenommen wurden (vgl. Abbildung 4.2). Aus dem gleichen Grund erreicht das HOMCMC auch niedrigere Werte von M_1 . Die Ober- und Untergrenzen der x-Achsen der Diagramme entsprechen dem höchsten bzw. niedrigsten gefundenen Wert des auf ihr dargestellten Parameters (der entsprechende Eintrag ist nicht im Diagramm zu sehen, wenn sein Wert vom χ^2 oberhalb des dargestellten Intervalls liegt). Dadurch zeigt sich ein weiterer Unterschied: Beim MCMC liegen die höchsten und niedrigsten Punkte in M_1 sehr nahe ($\Delta M_1 \lesssim 20$ GeV) an solchen, wo das χ^2 sehr niedrig ist ($\chi^2 \lesssim 35$). Dies liegt ebenfalls an zu klein angenommenen Unsicherheiten. In beiden Fällen ist auch bei deutlich kleineren Werten von M_1 als im zweidimensionalen Fall ein niedriges χ^2 möglich, beim HOMCMC auch bei höheren. Dies liegt daran, dass bei diesen Werten die anderen Parameter andere Werte annehmen als diejenigen, die bei der zweidimensionalen Untersuchung festgehalten wurden.

Im Hinblick auf das unterschiedliche Verhalten von MCMC und HOMCMC fällt auf, dass bei ersterem die Unsicherheiten auf die Parameter als zu gering angenommen wurden, sodass ein deutlich kleinerer Bereich in M_1 als beim HOMCMC untersucht wurde. Dies bestätigt Abbildung 4.2. Darin ist für neun zufällig ausgewählte Ketten der Fehler auf M_1 gegen die Iterationszahl aufgetragen. Schon zu Beginn der Benutzung des HOMCMC liegen die Fehler auf M_1 bei den verschiedenen Ketten zwischen etwa 70 GeV und 240 GeV, was bedeutet, dass die Unsicherheiten in Tabelle 4.1 als deutlich zu niedrig gewählt wurden, insbesondere beim MCMC. Die Unsicherheiten auf die anderen Parameter werden vom HOMCMC ebenfalls als größer als in Tabelle 4.1 ermittelt, sind jedoch aus Platzgründen nicht abgebildet. Trotz der als zu klein angenommenen Fehler wurde in dieser Untersuchung M_1 auf einem größeren Intervall als bei der zweidimensionalen Untersuchung variiert. Dies liegt daran, dass der Wert vom χ^2 im zweidimensionalen Fall stark ansteigt, wenn M_1 einen Wert von ungefähr -400 GeV unterschreitet, weil die anderen Parameter so festgehalten werden, dass hohe Beträge von M_1 ausgeschlossen werden (siehe Abbildung 3.1). Bei sieben freien Parametern dagegen können andere Parameter so gewählt werden, dass weitere Bereiche in M_1 ein niedriges χ^2 ermöglichen.

In Abbildung 4.2 fällt auch auf, dass sich eine Kette ab 70000 Iterationen abweichend von den anderen verhält, sodass deutlich größere Unsicherheiten auf M_1 angenommen werden. Auch in den Abbildungen in Abschnitt 4.4 zeigt diese Kette ein deutlich abweichendes Verhalten. Das liegt vermutlich daran, dass sie in einen anderen Bereich des Parameterraums gelangt. Um dies zu überprüfen, ist in Abbildung 4.3 nur mit Punkten dieser Kette eine zu Abbildung 4.1 analoge Auftragung der Häufigkeit von Punkten in Abhängigkeit von M_1 und χ^2 zu sehen. Man erkennt, dass viele der Punkte mit positivem M_1 von dieser Kette stammen. Sie ist also tatsächlich in einen anderen Teil des Parameterraums als die meisten

anderen Ketten gelangt. Von den Punkten mit positivem M_1 , die nicht von dieser Kette stammen, gehören nur sehr wenige zu anderen Ketten, die in Abbildung 4.2 zu sehen sind. Manche der dort abgebildeten Ketten besitzen sogar überhaupt keine Punkte in diesem Bereich von M_1 mit einem χ^2 von weniger als 60 (haben also in einer zu Abbildung 4.3 analogen Auftragung keine sichtbaren Punkte mit positivem M_1).

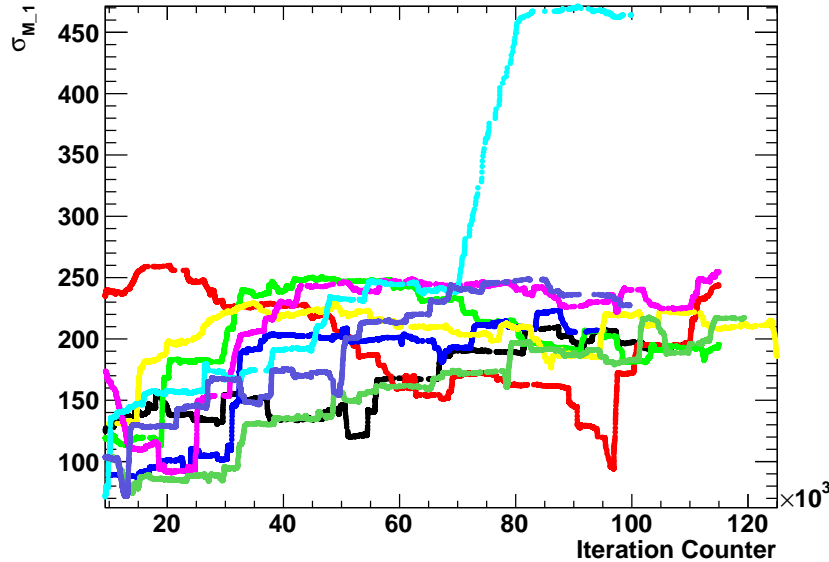


Abbildung 4.2: Für neun verschiedene, zufällig ausgewählte Ketten wurde die Größe des Fehlers auf M_1 in GeV gegen die Iterationszahl aufgetragen. Diese beginnt bei der ersten Iteration, bei der das HOMCMC verwendet wurde. Man erkennt also auch, dass erst nach knapp 10000 Iterationen 500 akzeptierte Punkte vorhanden sind. Die Fehler sind um einiges größer als in Tabelle 4.1 gewählt. Da sie sich hier aus den akzeptierten Punkten berechnen, bedeutet das, dass die willkürliche Wahl bei den Startbedingungen zu klein war. Dies erklärt das verschiedene Verhalten von MCMC und HOMCMC, das sich in Abbildung 4.1 und den Abbildungen in Anhang A zeigt. Die Farben der Ketten sind jeweils die gleichen wie in Abbildung 4.5, 4.11 und 4.13. Auch dort verhält sich die hellblau dargestellte Kette ab etwa 70000 Iterationen auffallend anders als die anderen Ketten. Ab hier steigt ihr Fehler auf M_1 auf über 450 GeV und stagniert dann. Das abweichende Verhalten liegt vermutlich daran, dass sie in einen anderen Bereich des Parameterraums gelangt.

Die bereits zu Beginn dieses Kapitels geäußerte Vermutung, dass der Parameterraum in dieser Studie nur unzureichend untersucht wurde, kann bestätigt werden. Besonders augenfällig ist dies im positiven Bereich von M_1 , der vom MCMC überhaupt nicht erreicht wurde und in dem das HOMCMC nur sehr wenige Punkte untersucht hat. Die Verteilung der untersuchten Punkte legt jedoch die Vermutung nahe, dass es deutlich mehr Punkte mit niedrigem χ^2 in diesem Bereich gibt. Wenn man diesen eingehender untersuchen will, sollte man den Startpunkt einer Kette so wählen, dass er in diesem Bereich liegt.

Weitere zu Abbildung 4.1 analoge Diagramme sind in Anhang A zu sehen. Dort wurde χ^2 gegen jeden der variierten Parameter aufgetragen, sowohl mit den vom MCMC als auch mit den vom HOMCMC erzeugten Punkten.

Dadurch, dass mit dem MCMC in der Regel ein kleinerer Bereich des Parameterraums untersucht wurde, ergibt sich (verstärkt durch die Tatsache, dass ohnehin mehr MCMC-Punkte als HOMCMC-Punkte vorhanden sind) eine höhere Dichte der Untersuchung, durch die zum Teil Punkte mit niedrigerem χ^2 in bestimmten Bereichen gefunden wurden (zum Beispiel für $\tan\beta \approx 15$, siehe Abbildung A.6). Dies

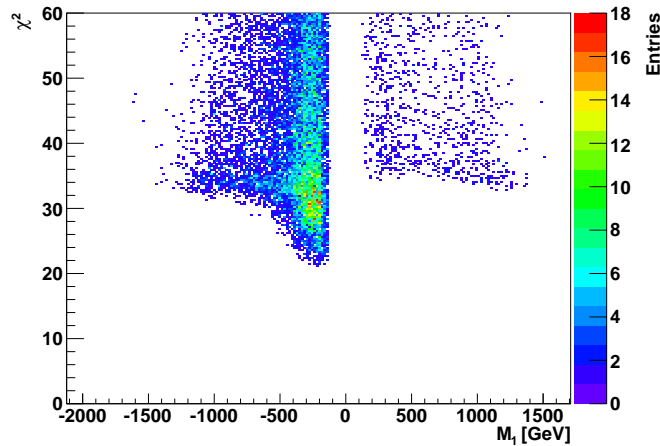


Abbildung 4.3: χ^2 wurde analog zu Abbildung 4.1 gegen M_1 aufgetragen, hier jedoch für nur eine Kette, die in Abbildung 4.2, 4.5, 4.11 und 4.13 ein auffälliges Verhalten zeigt. Man sieht, dass einige der Punkte mit positivem M_1 von dieser Kette stammen.

legt nahe, dass die Untersuchung des Parameterraums in beiden Fällen unzureichend ist. Das MCMC untersucht zwar ähnlich wie das HOMCMC Bereiche mit kleinem χ^2 intensiv, überwindet jedoch keine hohen Barrieren im χ^2 -Profil, jenseits welcher mitunter Punkte mit niedrigem χ^2 zu finden sind. Das HOMCMC dagegen erreicht solche Gebiete, doch bei ihm ist die Dichte der Untersuchung offenbar zu niedrig.

Das Problem einer zu geringen Dichte ließe sich durch das Erzeugen weiterer Punkte beheben, wenn genug Rechenzeit zur Verfügung stünde. Zu klein angenommene Fehler dagegen müssen manuell vergrößert werden. Beides stellt kein prinzipielles Problem dar. Für diese Untersuchung stand jedoch nur eine begrenzte Zeit zur Verfügung und ein zwischenzeitliches Ändern der Fehler auf Parameter erschwert die Vergleichbarkeit von Kriterien, die die Güte der Untersuchung charakterisieren.

Durch eine zu Abbildung 3.1 analoge Auftragung vom χ^2 gegen M_1 und M_2 kann überprüft werden, ob sich eine ähnliche Abhängigkeit zeigt, wenn nicht nur diese beiden Parameter variiert werden, sondern fünf weitere ebenfalls. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.4 zu sehen. Da im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall für jede Kombination von M_1 und M_2 die anderen Parameter frei variiert werden können und somit der Wert vom χ^2 beliebig hoch werden kann (nicht jedoch beliebig klein), ist jeweils der minimale Wert vom χ^2 im entsprechenden Bereich dargestellt.

Wie bereits in Abbildung 4.1 zu sehen, variiert M_1 auf einem größeren Intervall als im zweidimensionalen Fall (Abbildung 3.1). Ähnlich zur zweidimensionalen Untersuchung scheint der Bereich, in dem der Betrag von M_1 größer als der von M_2 ist, durch ein sehr hohes χ^2 ausgeschlossen zu sein und macht erlaubte Punkte in diesem Gebiet sehr unwahrscheinlich. Daher wird er vom MCMC fast gar nicht untersucht, wohingegen das HOMCMC aufgrund größerer Unsicherheiten auf die Parameter in diesem Bereich mehr Punkte erzeugt. Im Gegensatz zur zweidimensionalen Untersuchung haben auch Punkte mit niedrigem Betrag von M_1 und hohem M_2 sehr niedrige Werte vom χ^2 . Dies wurde offenbar durch das Festhalten von Parametern ausgeschlossen, die im siebendimensionalen Fall variiert wurden. Während das MCMC keine so hohen Werte von M_2 wie im zweidimensionalen Fall erzeugt (maximal ≈ 3000 GeV im Gegensatz zu ≈ 4000 GeV) und die Untergrenze mit jeweils etwa 0 GeV übereinstimmt, deckt das HOMCMC einen deutlich größeren Bereich in diesem Parameter ab, der von etwa -2500 GeV bis ca. 7000 GeV reicht. Dies liegt weit jenseits der in Tabelle 4.1 aufgelisteten Grenzen

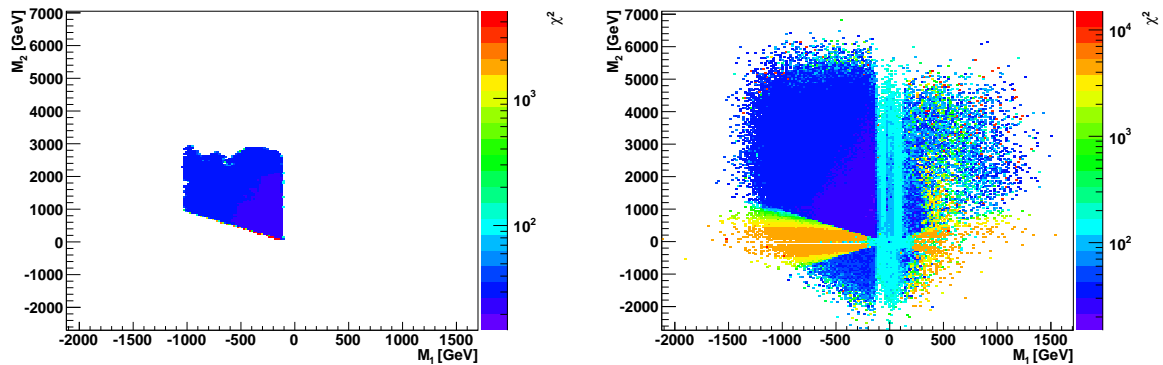


Abbildung 4.4: χ^2 in Abhängigkeit von M_1 und M_2 in den siebendimensionalen Untersuchungen mit MCMC (links) und HOMCMC (rechts). Da die fünf anderen Parameter nicht zu sehen sind, für eine feste Kombination von M_1 und M_2 jedoch die verschiedensten Werte der anderen Parameter und somit prinzipiell beliebig hohe Werte vom χ^2 möglich sind, wird jeweils nur der niedrigste Wert vom χ^2 im entsprechenden M_1 - M_2 -Bereich abgebildet. Da die linke Abbildung nur negative Werte von M_1 und positive von M_2 enthält, stellt sie im Grunde genommen nur einen Teil des oberen linken Quadranten der rechten Abbildung dar. Die Ober- und Untergrenzen von M_1 und M_2 wurden durch die jeweils höchsten oder niedrigsten mit dem HOMCMC gefundenen Werte festgelegt und für das MCMC zur besseren Vergleichbarkeit gleich gewählt.

und ist somit ein Nebeneffekt der eher hohen Unsicherheiten auf die Parameter. Da das MCMC nur Werte von $M_1 \lesssim -100$ GeV erzeugt, lassen sich über den positiven Bereich und Werte in der Nähe von 0 GeV nur auf der Basis des HOMCMC Aussagen tätigen. Das gleiche gilt für die Bereiche, in denen M_2 negativ oder sehr hoch ist. Es sind nicht genug Punkte in den entsprechenden Gebieten vorhanden, um diese Hypothese abzusichern, doch das Diagramm legt die Vermutung nahe, dass das χ^2 -Profil (zumindest näherungsweise) symmetrisch unter einer Spiegelung an den Hyperebenen mit $M_1 = 0$ GeV bzw. $M_2 = 0$ GeV ist. Wollte man dies näher untersuchen, müsste man Punkte in den entsprechenden Bereichen als Startpunkte von Markov-Ketten wählen. Die niedrige Dichte, an der sich zeigt, dass die Untersuchung noch unzureichend ist, erkennt man vor allem daran, dass sehr kleine Bereiche mit hohem und niedrigem χ^2 dicht beieinander liegen. Es ist möglich, dass in einem solchen Gebiet mit hohem χ^2 auch geringere Werte gefunden würden, wenn nur eine ausreichende Anzahl an Punkten darin vorliegt. Auch gibt es viele kleine leere Bereiche, in denen kein einziger Punkt erzeugt wurde, was ein noch eindeutigeres Zeichen für eine zu niedrige Dichte der Untersuchung ist. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich bei sehr hohen Werten von M_2 . Für sehr kleine Beträge von M_1 bildet sich ein breites hellblaues Band im Diagramm aus, das eine merkliche Erhebung im χ^2 -Profil darstellt. Die entsprechende Erhebung für kleine Beträge von M_2 ist um einiges höher und nimmt in der Breite zu, wohingegen die Schwelle um $M_1 = 0$ GeV herum nur äußerst langsam breiter wird (man beachte die verschiedenen Skalen von M_1 und M_2).

4.3 Effizienzvergleich

Analog zu den Kriterien in Abschnitt 3.4 wird im Folgenden verglichen, wie effizient der siebendimensionale Parameterraum mittels einfacher Markov-Ketten und solchen 500. Ordnung untersucht wird. Anders als dort gibt es hier nur zwei Einstellungen, die zu vergleichen sind: einfache Markov-Ketten und solche 500. Ordnung mit einem Skalenfaktor von 0,7. Da hierbei wiederum eine vergleichbare Anzahl an Punkten grundlegend für einen Vergleich ist, die Ketten jedoch zum Teil verschieden lang sind, wurden

hier jeweils 15 Ketten mit 130000 Punkten verglichen. Dies ergibt die maximal erreichbare Anzahl an Punkten von $1,95 \cdot 10^6$, wenn man fordert, dass alle in den Vergleich eingehenden Ketten gleich lang sind, denn es stehen wenige längere Ketten höherer Ordnung zur Verfügung, wohingegen die kürzeren Ketten trotz ihrer größeren Anzahl zu keiner höheren Gesamtpunktzahl führen.

Sampler	MCMC	HOMCMC
N	1950000	1950000
N_{acc}	235185	44283
akzeptierter Anteil	0,121	0,023
χ^2_{min}	20,9	21,0
η_1	0,00351	0,00025
$\eta_{5,99}$	0,0674	0,0084
$\eta_{1,\text{acc}}$	0,0272	0,0089
$\eta_{5,99,\text{acc}}$	0,41	0,21

Tabelle 4.2: Effizienzkriterien in sieben Dimensionen analog zum zweidimensionalen Fall in Tabelle 3.2. Da nur eine Sorte von Markov-Ketten höherer Ordnung vorliegt, nämlich solche 500. Ordnung mit Skalenfaktor 0,7, muss zwischen diesen nicht differenziert werden. Alle Dezimalzahlen sind gerundet.

Der akzeptierte Anteil ist mit 12,1% für den MCMC und 2,3% für den HOMCMC erheblich niedriger als im zweidimensionalen Fall, wo Werte von 34% bis 72% vorlagen. Dies liegt daran, dass in einem siebendimensionalen Raum eine größere Wahrscheinlichkeit besteht, dass mindestens einer der Parameter ungünstig gewählt ist, sodass der Wert vom χ^2 hoch ist und die Wahrscheinlichkeit gering, dass ein Punkt akzeptiert wird. Auch ist die Diskrepanz zwischen den beiden verschiedenen Arten von Ketten in der siebendimensionalen Untersuchung enorm. Beide Werte sind deutlich kleiner als erwünscht (ein wünschenswerter Bereich ist 20% bis 50%), was vermutlich daran liegt, dass eine Kettenlänge von 130000 Punkten im siebendimensionalen Fall (anders als im zweidimensionalen) unzureichend ist. Während der Wert für den MCMC jedoch nur um einen Faktor 2 zu klein ist, müsste er für den HOMCMC um eine Größenordnung höher sein. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Unsicherheiten auf die Parameter beim HOMCMC recht groß sind, sodass viele Punkte weitab von den Bereichen mit niedrigem χ^2 zufällig ausgewählt werden. Ein weiterer Grund für den geringen akzeptierten Anteil des HOMCMC ist der zu hohe Skalenfaktor. In Tabelle 3.2 zeigt sich, dass ein niedrigerer Skalenfaktor meist zu höheren Anteilen von akzeptierten Punkten führt. Auch in der vorläufigen elfdimensionalen Untersuchung wurden die höchsten Akzeptanzraten mit Skalenfaktoren von 0,3 bis 0,4 erzielt¹. An den niedrigen Anzahlen akzeptierter Punkte zeigt sich abermals, dass die Untersuchung des Parameterraums noch unzureichend ist. Mit deutlich längeren Ketten würde sich dieser Wert vermutlich verbessern.

Das minimale gefundene χ^2 ist in beiden Fällen sehr ähnlich mit $\chi^2_{\text{min}} = 20,9$ für den MCMC bzw. $\chi^2_{\text{min}} = 21,0$ für den HOMCMC. Beide Werte liegen merklich unter denen, die bei nur zwei freien Parametern gefunden wurden. Das verwundert nicht, denn in einer siebendimensionalen Untersuchung können M_1 und M_2 so gewählt werden, dass sie die ideale Kombination der zweidimensionalen Untersuchung darstellen, während zugleich die anderen fünf Parameter so angepasst werden, dass sich ein noch niedrigeres χ^2 ergibt. Auch kann möglicherweise eine völlig andere Kombination von Parametern gefunden werden, für die sich ebenfalls ein niedriges χ^2 ergibt.

Die Punkte, an denen der Wert vom χ^2 um nicht mehr als 1 über dem Minimalwert χ^2_{min} liegt, bildet in beiden Fällen einen äußerst geringen Anteil, der beim HOMCMC mit 0,025% erneut deutlich kleiner als beim MCMC mit 0,351% ist. Dieses Ergebnis lässt sich abermals darauf zurückführen, dass die

¹ Matthias Hamer, persönliche Kommunikation

Untersuchung noch unvollständig ist, bzw. darauf, dass die Unsicherheiten beim HOMCMC größer als beim MCMC sind. Das gleiche gilt für das Intervall mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$, worin beim MCMC nur 6,75% und beim HOMCMC gerade einmal 0,84% aller Punkte liegen. Diese Werte sind ebenfalls deutlich niedriger als im zweidimensionalen Parameterraum, was wiederum daran liegt, dass dessen Untersuchung gründlicher ist und bei weniger Parametern keine so große Wahrscheinlichkeit besteht, dass der Wert vom χ^2 zufällig erhöht wird.

Wenn man nur akzeptierte Punkte betrachtet, steigt der Anteil derjenigen, für die $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ bzw. $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ gilt. Dies liegt daran, dass Punkte mit niedrigen Werten vom χ^2 eine höhere Wahrscheinlichkeit haben, akzeptiert zu werden. Auch hier jedoch sind die Werte von 41% bzw. 21% für das $\chi_{\min}^2 + 5,99$ -Intervall kleiner als im zweidimensionalen Fall. Im $\chi_{\min}^2 + 1$ -Intervall dagegen erreicht das MCMC sogar mit 2,72% einen Wert, der vergleichbar mit einigen der zweidimensionalen Untersuchungen ist, wohingegen das HOMCMC mit 0,89% knapp unter dem niedrigsten Wert der zweidimensionalen Untersuchung (0,94%) liegt.

Sampler	$\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$		$\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$		$\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$		$\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$	
	$M_{1,\min}$	$M_{1,\max}$	$M_{1,\min}$	$M_{1,\max}$	$M_{2,\min}$	$M_{2,\max}$	$M_{2,\min}$	$M_{2,\max}$
MCMC	-425,5	-128,5	-595,4	-116,8	137,0	1836,7	120,3	2103,9
HOMCMC	-383,7	-135,8	-581,5	242,1	203,0	1699,8	-585,9	3199,6
Sampler	$m_{\tilde{l},\min}$	$m_{\tilde{l},\max}$	$m_{\tilde{l},\min}$	$m_{\tilde{l},\max}$	$m_{\tilde{\nu}_3,\min}$	$m_{\tilde{\nu}_3,\max}$	$m_{\tilde{\nu}_3,\min}$	$m_{\tilde{\nu}_3,\max}$
MCMC	216,3	894,2	193,4	1512,3	396,8	2141,5	332,1	2715,7
HOMCMC	-344,5	885,3	-385,5	1403,1	705,2	5025,0	-1507,5	5995,2
Sampler	$M_{A,\min}$	$M_{A,\max}$	$M_{A,\min}$	$M_{A,\max}$	μ_{\min}	μ_{\max}	μ_{\min}	μ_{\max}
MCMC	1000,0	4046,9	787,4	4075,3	142,8	816,9	140,0	1088,9
HOMCMC	1000,0	4826,7	530,0	5564,0	145,9	481,3	-275,4	947,5
Sampler	$\tan\beta_{\min}$	$\tan\beta_{\max}$	$\tan\beta_{\min}$	$\tan\beta_{\max}$				
MCMC	11,17	62,43	5,10	63,06				
HOMCMC	9,60	63,81	4,56	67,69				

Tabelle 4.3: Maximal- und Minimalwerte von Parametern in Gebieten mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ bzw. $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$. In die Zahlen sind auch nicht akzeptierte Punkte eingegangen, jedoch selbstverständlich keine mit unendlichem χ^2 . Alle Werte von M_1 , M_2 , $m_{\tilde{l}}$, $m_{\tilde{\nu}_3}$ und M_A sind in GeV. Alle Werte wurden auf die erste Nachkommastelle gerundet, die von $\tan\beta$ auf die zweite.

Auch in dieser Untersuchung ist es von Interesse, die Größe der Bereiche im Parameterraum anzugeben, in denen $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 1$ oder $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ gilt. In Tabelle 4.3 ist ein Überblick über die Minimal- und Maximalwerte jedes Parameters für Punkte mit entsprechendem χ^2 gegeben. Es sei wieder darauf hingewiesen, dass sich die Werte nur auf zufällig gefundene Punkte beziehen und die Bereiche in Wahrheit möglicherweise größer sind. Auch legen die Abbildungen in Anhang A sowie die Abbildungen 4.1 und 4.4 nahe, dass die Gebiete nicht in allen Fällen einfach zusammenhängen, sondern zum Teil Barrieren (Gebiete mit höherem χ^2) umschließen.

In den beiden Parametern M_1 und M_2 , die auch in der zweidimensionalen Untersuchung variiert wurden, sind die Intervalle im siebendimensionalen Fall fast immer größer. Lediglich der mit dem MCMC gefundene Wert von $M_{2,\max}$ mit $\chi^2 < \chi_{\min}^2 + 5,99$ ist niedriger als im zweidimensionalen Fall (vgl. Tabelle 3.3). Dass die Intervalle im Allgemeinen größer sind, verwundert nicht, weil die anderen Parameter so variiert werden können, dass größere oder kleinere Werte von M_1 oder M_2 niedrigere Werte vom χ^2 erlauben. Man erkennt dies auch am Vergleich von Abbildung 4.4 mit Abbildung 3.1.

Häufig, aber nicht immer, sind die Minimalwerte, die mit dem HOMCMC erreicht wurden, kleiner

und die Maximalwerte größer als die mit dem MCMC erreichten. Dies verwundert nicht angesichts der größeren Fehler auf die Parameter, die dazu führen, dass häufig auch Punkte mit niedrigem χ^2 und umgekehrtem Vorzeichen des entsprechenden Parameters gefunden wurden. Erstaunlicher ist die beträchtliche Anzahl an Abweichungen von dieser Regel, die sich vermutlich auf die unzureichende Anzahl an untersuchten Punkten zurückführen lässt. Insbesondere dann, wenn die mit dem MCMC und dem HOMCMC gefundenen Minimalwerte verschiedene Vorzeichen haben, legt ein Vergleich mit den zugehörigen Abbildungen in Anhang A nahe, dass zwischen den entsprechenden Punkten und dem globalen Minimum eine hohe Barriere liegt, die vom MCMC nicht überwunden wurde. In den Fällen, wo das Vorzeichen der Minimal- oder Maximalwerte der Parameter gleich ist, sind die Werte dennoch nur manchmal sehr ähnlich. Es sei noch einmal daran erinnert, dass der Wert vom χ^2 nicht von der Art und Weise der Untersuchung des Parameterraums abhängt. Daraus lässt sich abermals schlussfolgern, dass die Untersuchung des Parameterraums noch unvollständig ist. Mit genug Punkten sollte sich für MCMC und HOMCMC überall der (nahezu) gleiche Wert einstellen.

4.4 Korrelationen zwischen den Parametern

Analog zu den Untersuchungen in Abschnitt 3.5 zur Korrelation zwischen M_1 und M_2 kann man untersuchen, ob sich ein ähnliches Verhalten zwischen zwei der sieben Parameter zeigt. Wieder bieten sich die beiden dort verwendeten Methoden an, das Auftragen des vom HOMCMC berechneten Korrelationskoeffizienten gegen die Zahl der Iterationen und gegen einen Parameter.

Das χ^2 -Profil in Abbildung 4.4 legt keine so starke Antikorrelation nahe wie bei der zweidimensionalen Untersuchung in Abbildung 3.1. Dennoch soll überprüft werden, wie hoch diese ist.

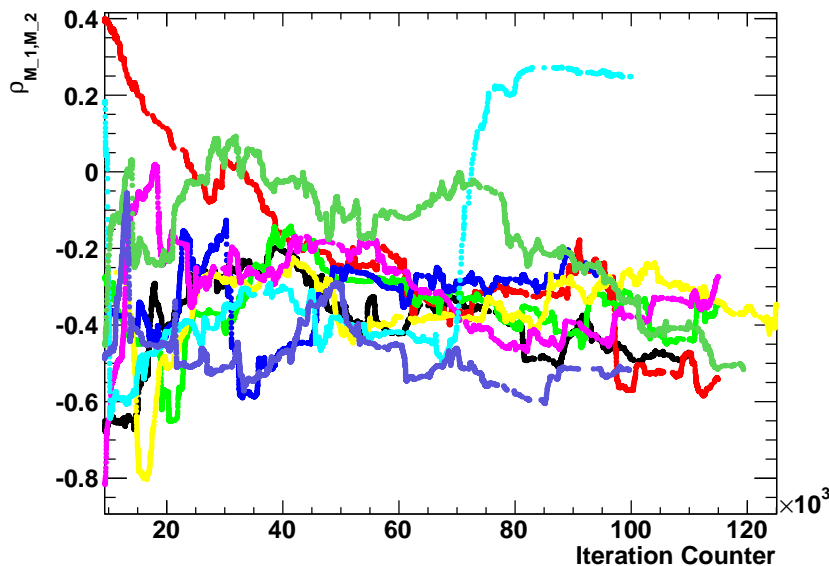


Abbildung 4.5: Für neun verschiedene Ketten (jede durch eine unterschiedliche Farbe dargestellt) ist der Korrelationskoeffizient zwischen M_1 und M_2 gegen die Iterationszahl aufgetragen. Die meisten Ketten nehmen nach anfänglich sehr unterschiedlichen Werten immer ähnlichere Werte an. Es zeigt sich insgesamt eine mäßige Antikorrelation.

In Abbildung 4.5 ist analog zu den Darstellungen in Abbildung 3.5, 3.6 und 3.7 der Korrelationskoeffizient zwischen M_1 und M_2 gegen die Anzahl der Iterationen aufgetragen. Um sowohl die Gesamtheit zu repräsentieren als auch die Übersichtlichkeit zu wahren, wurden neun zufällig ausgewählte Ketten in einem Diagramm abgebildet. Der Korrelationskoeffizient nimmt am Anfang der Ketten sehr verschiedene Werte an, nähert sich jedoch für höhere Iterationszahlen einem Wertebereich von $-0,6$ bis $-0,3$ an. Es lässt sich also generell eine leichte Antikorrelation feststellen. Nur eine Kette (hellblau dargestellt) weicht ab etwa 70000 Iterationen sehr stark von den anderen ab, denn ihr Korrelationskoeffizient nimmt Werte von über $0,2$ an. Es ist dieselbe Kette wie in Abbildung 4.2, die sich vermutlich deswegen anders verhält, weil sie in einen anderen Teil des Parameterraums als die anderen gelangt (vgl. Abbildung 4.3). Dass die meisten Ketten einen sehr ähnlichen Wertebereich annehmen, ist ein gutes Zeichen. Es deutet darauf hin, dass die Ketten relativ stabil sind und bei der Untersuchung von näherungsweise deckungsgleichen Teilen des Parameterraums nicht zu Extremwerten ausreißern. Auch zeigt sich, dass das Verhalten gegen Ende der Ketten nicht vom Verhalten am Anfang abhängt, denn dort weisen die Werte eine große Spanne auf, die sich bei weiteren Iterationen verkleinert.

Wie in Abbildung 3.7 handelt es sich bei den hier dargestellten Ketten um solche 500. Ordnung, sodass keine so schnellen Schwankungen wie in Abbildung 3.5 und 3.6 beobachtet werden. Im Vergleich zum zweidimensionalen Fall sind die Amplituden der Schwankung wesentlich kleiner und unregelmäßiger. Dies lässt sich im Wesentlichen dadurch erklären, dass der siebendimensionale Parameterraum weitaus mehr Abstimmungen zwischen den Parametern zulässt und daher nicht alles von den Werten von M_1 und M_2 abhängt.

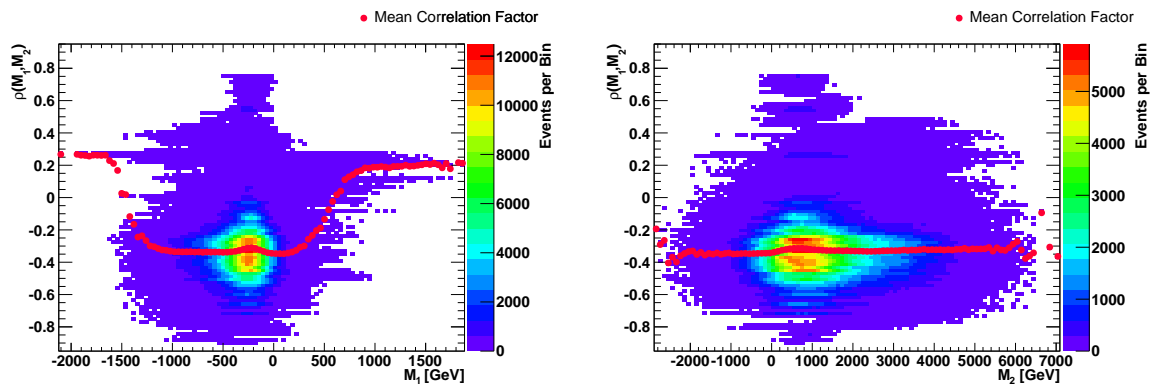


Abbildung 4.6: Der Korrelationskoeffizient zwischen M_1 und M_2 aufgetragen gegen M_1 (links) und M_2 (rechts) auf Basis der siebendimensionalen Untersuchung. Für Bereiche mit nicht zu wenigen Punkten liegt der Mittelwert bei ungefähr $-0,4$ bis $-0,3$. Damit ist keine so starke Antikorrelation wie in Abbildung 3.8 vorhanden. In den Bereichen, wo M_1 besonders hoch oder niedrig ist, geht der Durchschnitt der Korrelation zu kleinen positiven Werten über, was jedoch aufgrund der geringen Statistik nur sehr begrenzte Aussagekraft besitzt. Abbildung 4.4 zeigt, dass für positive Werte von M_1 mehr Punkte mit positivem als mit negativem M_2 gefunden wurden, was zu einer leicht positiven Korrelation führen kann.

In Abbildung 4.6 ist analog zu Abbildung 3.8 die Häufigkeit von Punkten mit einem bestimmten Korrelationskoeffizienten und einem bestimmten Wert von M_1 bzw. M_2 und der durchschnittliche Korrelationskoeffizient gegen M_1 bzw. M_2 aufgetragen. Diese Abbildung und alle dazu analogen (Abbildung 4.7, 4.9 und 4.10) wurden auf der Basis aller Punkte des HOMCMC erstellt. Es zeigt sich keine so starke Antikorrelation wie im zweidimensionalen Pendant. In den Intervallen von M_1 und M_2 , in denen viele Punkte vorhanden sind, ist der Korrelationskoeffizient mit Werten zwischen $-0,3$ und $-0,4$ recht moderat, entspricht also einer nur sehr leichten Antikorrelation. Bei sehr hohen und sehr niedrigen Werten von

M_1 ist der Korrelationskoeffizient sehr leicht positiv, doch es liegen zu wenige Punkte vor, um dieser Tatsache eine wirkliche Aussagekraft zuzusprechen. Immerhin ist aufgrund der sich in Abbildung 4.4 andeutenden Spiegelsymmetrie des χ^2 -Profils bezüglich der x- und y-Achse davon auszugehen, dass der Korrelationskoeffizient seinen Betrag beibehält und sein Vorzeichen wechselt, wenn nur einer der Parameter das Vorzeichen wechselt. In derselben Abbildung ist auch zu erkennen, dass erheblich mehr Punkte mit positivem M_1 und M_2 erzeugt wurden als mit positivem M_1 und negativem M_2 . Dies erklärt den positiven Korrelationskoeffizienten bei hohem M_1 , aber nicht den bei sehr niedrigen Werten, dessen statistische Aussagekraft jedoch wie gesagt bezweifelt werden darf.

Bei sieben Parametern sind 21 Korrelationskoeffizienten vorhanden, die gegen beide Parameter, auf die sie sich beziehen, und die Iterationszahl aufgetragen werden können. Somit ergeben sich 42 Diagramme der Art von Abbildung 4.7 und 21 zu Abbildung 4.5 analoge, wovon im Folgenden nur solche mit auffälligen Eigenschaften betrachtet werden.

Die mit Abstand stärkste Antikorrelation zeigen die Parameter M_1 und μ . Der Wert des Korrelationskoeffizienten liegt, wie man in Abbildung 4.7 sieht, über das gesamte Intervall beider Parameter im Durchschnitt bei $-0,9$. Dies ist die festgelegte Untergrenze, die per Definition nicht unterschritten wird. Von den wenigen Punkten, wo der Korrelationskoeffizient sichtlich vom Mittelwert abweicht, gibt es keinen, wo Werte von mehr als $-0,6$ angenommen werden. Die Antikorrelation ist also ausnahmslos stark.

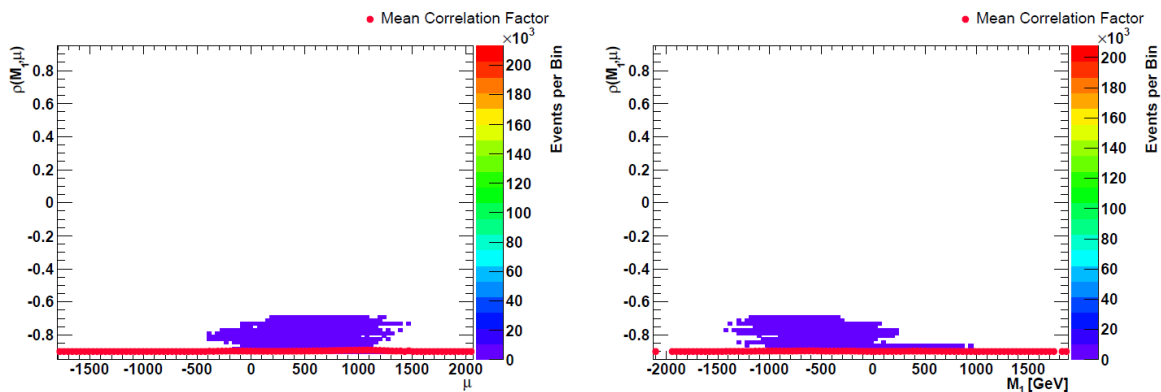


Abbildung 4.7: Korrelationskoeffizient zwischen μ und M_1 gegen μ (links) und M_1 (rechts) aufgetragen. Es gibt nur wenige Punkte, an denen er leicht von $-0,9$ abweicht, was einen kaum erkennbaren Einfluss auf den Durchschnittswert hat, da bei der überwältigenden Mehrheit der Punkte ein Korrelationskoeffizient von exakt $-0,9$ vorliegt, und dies über die gesamte Breite des Intervalls in beiden Parametern.

Auch in der Auftragung gegen die Iterationszahl der Ketten zeigt sich diese Antikorrelation in extremer Weise (Abbildung 4.8). Nur zwei Ketten nehmen anfangs (bei weniger als 30000 Iterationen) Korrelationskoeffizienten von über $-0,9$ an, die allerdings immer noch sehr starken Antikorrelationen entsprechen. Danach jedoch verharrt ihr Korrelationskoeffizient bei $-0,9$, genau wie es bei allen anderen Ketten während jeder Iteration der Fall ist.

Aufgrund dieser sehr starken Antikorrelation stellt sich die Frage, ob man dies aus der Auftragung des Werts vom χ^2 gegen die beiden Größen erkennen kann. In Abbildung 4.9 ist anhand der von MCMC und HOMCMC erzeugten Punkte analog zu Abbildung 4.4 das jeweils niedrigste χ^2 als farbig dargestellte z-Achse gegen M_1 auf der x-Achse und μ auf der y-Achse aufgetragen.

Während sich anhand der Punkte des MCMC (in Abbildung 4.9 links) nur aus einer diagonalen Begrenzung, bei der der Wert vom χ^2 stark ansteigt und unterhalb welcher es keine Punkte gibt, auf eine Antikorrelation schließen lässt, stellt sich das vom HOMCMC untersuchte Gebiet (rechts) als

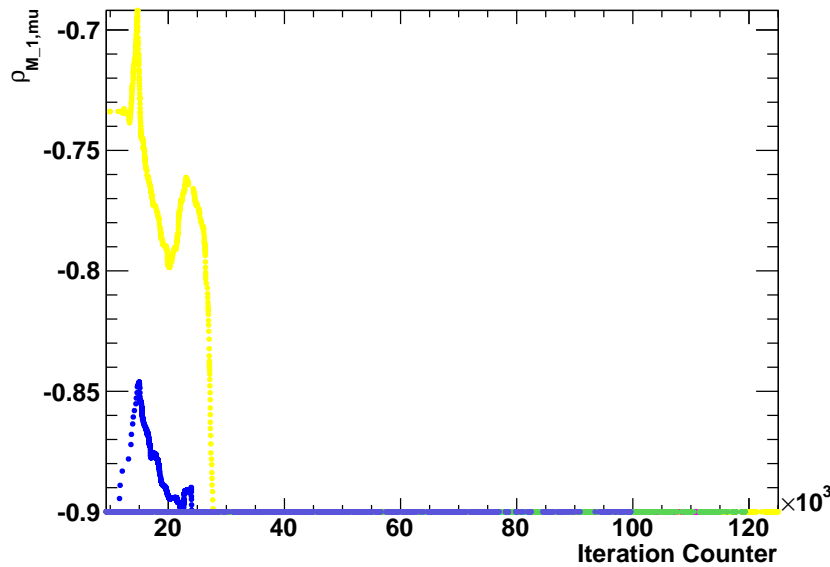


Abbildung 4.8: Der Korrelationskoeffizient zwischen M_1 und μ weicht nur bei wenigen Ketten anfangs von $-0,9$ ab. In dieser Grafik sind ebenfalls neun Ketten abgebildet, die jedoch größtenteils allesamt übereinander liegen.

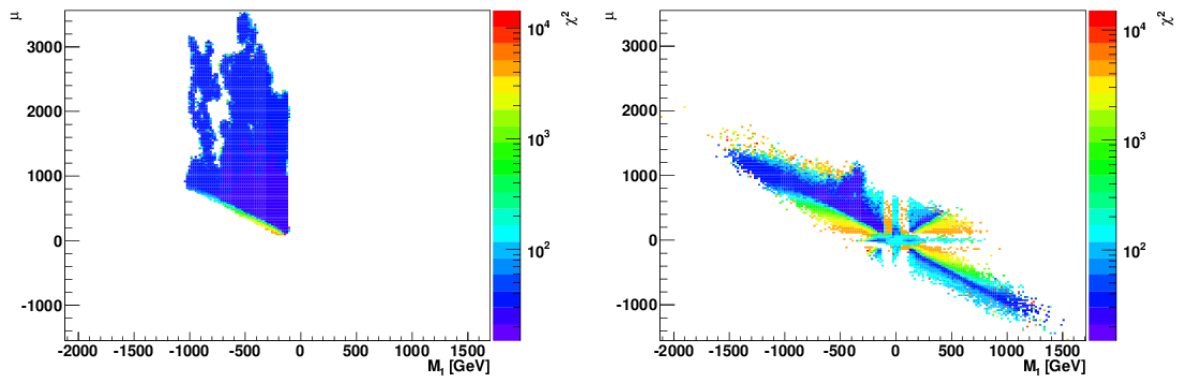


Abbildung 4.9: Darstellung vom χ^2 in Abhängigkeit von M_1 (x-Achse) und μ (y-Achse) mit vom MCMC (links) und HOMCMC (rechts) erzeugten Punkten. Falls für eine Kombination der beiden Parameter mehrere Punkte vorhanden sind, ist das niedrigste χ^2 dargestellt. Während die linke Abbildung höhere Werte von μ enthält, gibt es in der rechten auch negative Werte von μ und einen deutlich größeren Bereich in M_1 . Aus der rechten Abbildung erkennt man die starke Antikorrelation zwischen M_1 und μ daran, dass alle untersuchten Punkte, insbesondere diejenigen mit niedrigem χ^2 nicht weit entfernt von einer Diagonalen liegen. Im Bereich mit positiven Werten von M_1 und μ deutet sich an, dass die χ^2 -Kontur spiegelsymmetrisch bezüglich der x- und y-Achse ist, doch es gibt hier nicht viele Punkte, um dies für größere Beträge zu bestätigen. Für negative Werte von beiden Parametern sind ausschließlich noch kleinere Beträge vorhanden. Die Grenzen von M_1 und die Untergrenze von μ entsprechen den mit dem HOMCMC gefundenen Maximal- oder Minimalwerten. Die Obergrenze von μ entspricht dem mit dem MCMC gefundenen Wert. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden die Grenzen in beiden Diagrammen gleich gewählt.

weitgehend diagonal dar. Nur für einen schmalen Bereich sind niedrige Werte von χ^2 vorhanden, und nicht sehr weitab davon wurden Punkte überhaupt durch Zufall gefunden. Daran zeigt sich besonders eindrucksvoll, dass das HOMCMC neue Punkte gemäß einer Normalverteilung vorschlägt, die an das χ^2 -Profil angepasst ist. Es ist ein erheblicher Vorteil, dass auf diese Weise der Bereich mit negativem μ und positivem M_1 erreicht wurde, weil die Korrelation zwischen beiden Parametern erkannt und die Größe der Fehler angepasst wurden. Da die Kontur an den Rändern recht offen ist und es gut möglich ist, dass sich auch für Punkte, in denen beide Parameter das gleiche Vorzeichen haben, ein ähnlich schmales Profil ausbildet (die wenigen vorhandenen Punkte legen das sehr nahe), kann die Untersuchung des siebendimensionalen Parameterraums mittels des HOMCMC auch an dieser Stelle noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden. Dies ist der Nachteil des HOMCMC: Wenn eine Korrelation vorhanden ist, ist es sehr unwahrscheinlich, dass Punkte weit abseits dieses korrelierten Bereichs gefunden werden. Dies zeigt sich noch stärker an den Werten mit hohem μ . Diese wurden vom HOMCMC gerade nicht gefunden, weil sich die vorgeschlagenen Punkte in einem schmalen Bereich befinden, der sich aus der Korrelation der Parameter ergeben hat. Auf diese Weise wurden nur sehr wenige Punkte abseits der Diagonalen vorgeschlagen. Das rechte Diagramm in Abbildung 4.9 hat den Anschein, dass sich für hohe Werte von μ ein hohes χ^2 ergibt. Dieser Anschein täuscht jedoch, wie man aus dem linken Diagramm sieht. Mit genügend Punkten in dieser Region lassen sich offenbar Parameterkombinationen finden, die ein hohes μ mit einem niedrigen χ^2 erlauben. Um die Bereiche, in denen M_1 und μ das gleiche Vorzeichen haben, eingehender zu untersuchen, sollte man die Startpunkte von Ketten in diesen Bereichen wählen.

Zwei weitere Größen, die recht stark antikorreliert sind, sind M_1 und $m_{\tilde{t}_1}$. Über die gesamte Breite des Intervalls in $m_{\tilde{t}_1}$ erkennt man in Abbildung 4.10 einen durchschnittlichen Korrelationskoeffizienten von ungefähr $-0,7$, was sich auch beim Intervall von M_1 zeigt, in dem viele Punkte vorliegen. Bei hohen und niedrigen Werten von M_1 ist die Antikorrelation dagegen deutlich schwächer, doch auch hier gilt, dass die Anzahl an Punkten zu gering ist, um dieses Ergebnis als gesichert zu betrachten.

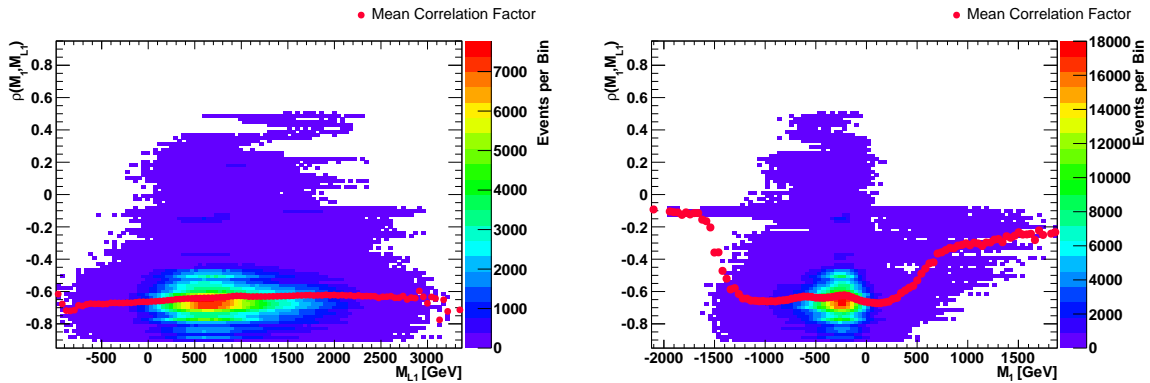


Abbildung 4.10: Korrelation zwischen $m_{\tilde{t}_1}$ und M_1 aufgetragen gegen $m_{\tilde{t}_1}$ (links) und M_1 rechts. Der durchschnittliche Korrelationskoeffizient ist durchgehend negativ, in Bereichen mit vielen Punkten sogar mit einem erheblichen Betrag ($\rho(m_{\tilde{t}_1}, M_1) \approx -0,7$).

Die Auftragung des Korrelationskoeffizienten von $m_{\tilde{t}_1}$ und M_1 gegen die Zahl der Iterationen ist in Abbildung 4.11 zu sehen. Es zeigt sich ähnlich wie in Abbildung 4.5 eine abnehmende Spanne an Werten des Korrelationskoeffizienten mit einer Ausnahme, die auf dieselbe Kette zurückgeht (gleiche Farben bedeuten in Abbildung 4.2, 4.5, 4.8, 4.11 und 4.13 immer dieselbe Kette). Der Grund für die Abweichung bei einer Kette ist vermutlich überwiegend der, dass sie in einen anderen Bereich des Parameterraums gelangt, was in Abschnitt 4.2 bereits ausführlicher besprochen wurde.

Da μ und M_1 sowie M_1 und $m_{\tilde{t}_1}$ miteinander antikorreliert sind, stellt sich die Frage, ob μ und $m_{\tilde{t}_1}$ eine

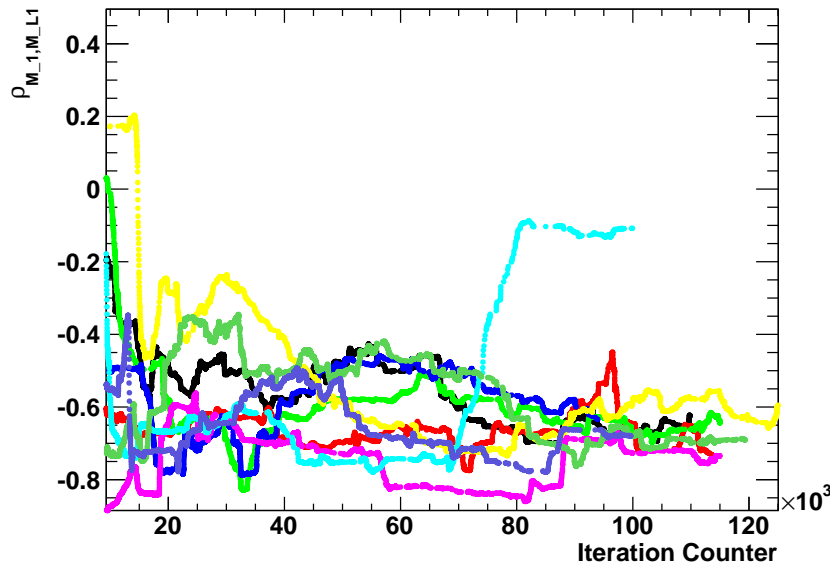


Abbildung 4.11: Der Korrelationskoeffizient zwischen m_{l_1} und M_1 aufgetragen gegen die Iterationszahl für neun durch verschiedene Farben gekennzeichnete Ketten. Nach recht verschiedenen Werten am Anfang nähern sich die Korrelationskoeffizienten mit Ausnahme einer Kette immer mehr einem Wert von etwa $-0,7$ bis $-0,6$ an.

positive Korrelation aufweisen. Dies ist der Fall, wie man anhand von Abbildung 4.12 sieht. Während der Korrelationskoeffizient für fast jeden Wert von m_{l_1} und mittlere Werte von μ (worin die meisten Punkte liegen) im Durchschnitt $0,6$ bis $0,7$ beträgt, scheinen μ und m_{l_1} für sehr niedrige und sehr hohe Werte von μ nur äußerst schwach korreliert zu sein. Wiederum liegen jedoch in diesen Bereichen nicht genug Punkte vor, um dieser Tatsache größere Bedeutung zuzumessen.

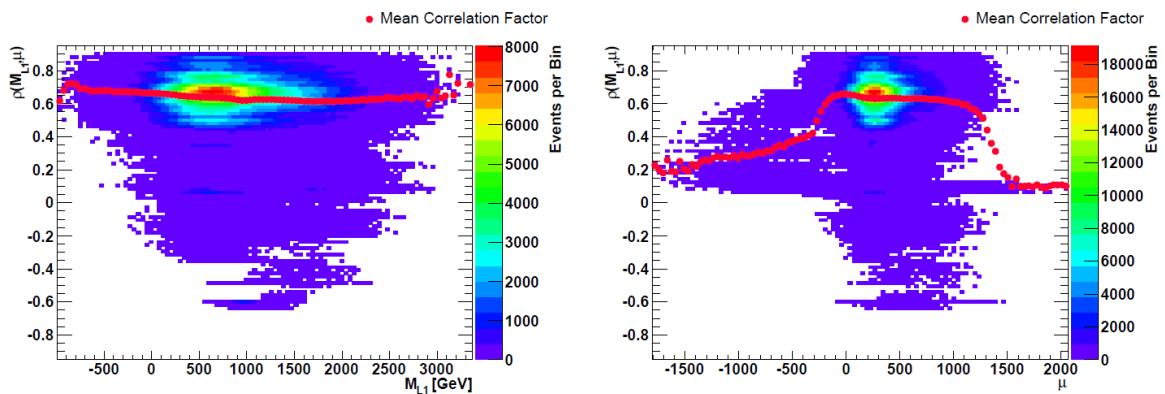


Abbildung 4.12: Korrelationskoeffizient zwischen m_{l_1} und μ gegen m_{l_1} (links) und μ aufgetragen. Die Korrelation ist für jeden Wert von m_{l_1} recht hoch, wohingegen sie bei sehr niedrigen und hohen Werten von μ verschwindet. Allerdings liegen in diesen Bereichen zu wenige Punkte für eine verlässliche Aussage vor.

Auch in der Auftragung gegen die Iterationszahl (Abbildung 4.13) zeigt sich die starke Korrelation zwischen m_{l_1} und μ . Wieder nehmen die Koeffizienten für fast alle Ketten nach anfänglichen Unterschieden immer ähnlichere Werte an. Lediglich eine Kette weicht wiederum deutlich ab und endet in

einem nahezu unkorrelierten Gebiet. Dies bestätigt abermals die Stabilität der Methode, aber auch die Notwendigkeit, mehrere Ketten zu verwenden, um ein umfassendes Bild zu erhalten.

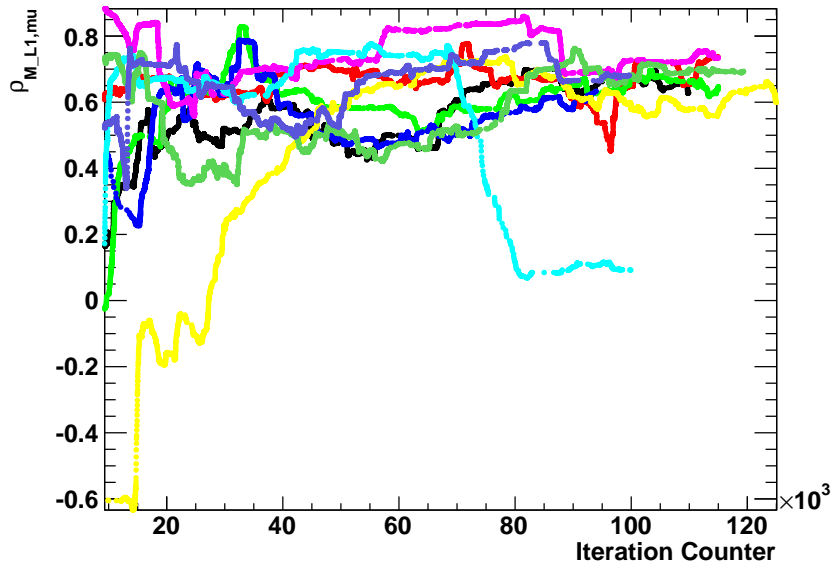


Abbildung 4.13: Der durch verschiedene Farben dargestellte Korrelationskoeffizient zwischen $m_{\bar{l}_1}$ und μ für verschiedene Ketten.

Der Vergleich von Abbildung 4.11 und 4.13 zeigt, dass die Korrelation zwischen $m_{\bar{l}_1}$ und μ umso höher ist, je stärker die Antikorrelation zwischen $m_{\bar{l}_1}$ und M_1 ist. Bezüglich der Amplitude und Frequenz der Schwankungen verhalten sich die in Abbildung 4.5, 4.8 und 4.13 dargestellten Korrelationskoeffizienten jeweils sehr ähnlich.

Die in diesem Abschnitt nicht erwähnten Kombinationen von Parametern weisen relativ geringe Korrelationen auf.

Fazit

Im Rahmen dieser Arbeit wurde betrachtet, wie ein zwei- und ein siebendimensionaler pMSSM-Parameterraum mithilfe von einfachen Markov-Ketten und solchen höherer Ordnung untersucht wird.

In Kapitel 3 wurden nur die Parameter M_1 und M_2 variiert. Die sich ergebenden χ^2 -Profile in Abbildung 3.1 zeigen ein enges Gebiet starker Korrelation zwischen den beiden Parametern. Als Ursache dieser Einschränkung wurde in Abschnitt 3.3 die Observable Ω_{CDM} , der kosmologische Dichteparameter der dunklen Materie, ausfindig gemacht.

Die Effizienzvergleiche in Abschnitt 3.4 zeigen, dass mit unterschiedlichen Einstellungen sehr unterschiedliche Anzahlen an Punkten akzeptiert wurden bzw. in Gebieten mit niedrigem χ^2 gefunden wurden. Schränkt man diese Kriterien auf den stark korrelierten Bereich ein, indem man fordert, dass M_1 größer als -350 GeV ist, ergeben sich deutlich niedrigere Anteile an akzeptierten Punkten. Markov-Ketten 100. Ordnung mit einem Skalenfaktor von 0,5 ergeben hier den höchsten Anteil, der am nächsten am wünschenswerten Bereich von 20% bis 50%, während sie in Bezug auf alle Punkte einen zu hohen akzeptierten Anteil ergeben. Während die einfachen Markov-Ketten weiter in den schmalen, korrelierten Bereich vordringen und somit niedrigere Beträge von M_1 und M_2 erzeugen, gelangen die Markov Ketten höherer Ordnung zu höheren Werten von M_2 . Generell zeigt sich, dass bei geeigneter Wahl der Einstellungen mit Markov-Ketten höherer Ordnung sehr gute Ergebnisse in Bezug auf akzeptierte Punkte erzielt werden können, bei ungünstigen Einstellungen sind sie einfachen Markov-Ketten jedoch unterlegen. Diese haben einen relativ hohen Anteil akzeptierter Punkte im engen, stark korrelierten Bereich und gelangen dort weiter als die Ketten höherer Ordnung, was ihr größter Vorzug in dieser Untersuchung ist.

Die Korrelation zwischen M_1 und M_2 wurde eingehend in Abschnitt 3.5 untersucht, dabei wurde gezeigt, dass sie bei niedrigen Beträgen der beiden Parameter am höchsten ist.

Die Kriterien der zweidimensionalen Untersuchung wurden in Kapitel 4 auf die siebendimensionale übertragen. Darin zeigt sich an vielen Stellen, dass der Parameterraum trotz mehrerer Millionen erzeugter Punkte noch nicht vollständig untersucht wurde. Projektionen vom χ^2 auf jeweils eine der sieben Dimensionen finden sich in 4.2 und Anhang A.

Da sich beim HOMCMC deutlich größere Fehler auf die Parameter einstellten als beim MCMC gewählt wurden, untersuchte dieser nur kleinere Gebiete im Parameterraum, was man an den genannten Abbildungen und Tabelle 4.3 erkennt. Dies ist ein Vorteil des HOMCMC, dessen Kehrseite jedoch ein sehr geringer Anteil akzeptierter Punkte ist, was man in Tabelle 4.2 sieht. Es ist nicht auszuschließen, dass sich die Anteile bei einer längeren Untersuchung weiter erhöhen. Ein niedrigerer Skalenfaktor hätte sich wahrscheinlich positiv auf die Anzahl der akzeptierten Punkte ausgewirkt.

In Abschnitt 4.4 wird gezeigt, dass zwischen einigen der Parameter mitunter sehr starke Korrelationen bestehen. Im Vergleich zum zweidimensionalen Fall ist die Korrelation zwischen M_1 und M_2 jedoch

deutlich geringer, weil die anderen Parameter so variiert werden können, dass weitere Gebiete in beiden Parametern gut zueinander passen. Am Vergleich der Korrelationskoeffizienten mehrerer verschiedener Ketten erkennt man, dass sie nach anfänglich sehr verschiedenen Werten (mit wenigen Ausnahmen) einen gemeinsamen, eingeschränkten Wertebereich annehmen, was ein sehr gutes Zeichen für die numerische Stabilität dieser Methode ist.

Bei der künftigen Untersuchung des vollen Parameterraums des pMSSM11 wird es nötig sein, eine deutlich höhere Anzahl an Punkten zu untersuchen. Schon beim deutlich einfacheren cMSSM, das nur fünf freie Parameter hat, wurden 850 Millionen Punkte untersucht [11]. Für eine gründliche Untersuchung des pMSSM11 sind noch mehr Punkte nötig. Ferner müssen Ausschlussgrenzen von Suchen nach Supersymmetrie am LHC und LEP berücksichtigt werden. Für die Punkte des Parameterraums werden durch eine Regression über ein neuronales Netz die bislang negativen Resultate der Suchen nach Supersymmetrie in die Analyse eingebracht. Die Untersuchungen in dieser Arbeit zeigen, dass verschiedene Startpunkte über den Parameterraum verteilt gewählt werden sollten. Darüber hinaus legt einiges die Annahme nahe, dass höhere Skalenfaktoren gut für eine explorative Untersuchung des Parameterraums sind, das heißt, dass mit diesen große Bereiche im Parameterraum untersucht werden. Für eine höhere Dichte der Untersuchung und höhere Anteile akzeptierter Punkte bieten sich jedoch niedrigere Skalenfaktoren an.

Weitere χ^2 -Profile der siebendimensionalen Untersuchung

Im Folgenden sind weitere Diagramme dargestellt, die analog zu Abbildung 4.1 zeigen, wie die Anzahl an Punkten von einem Parameter auf der x-Achse und von χ^2 auf der y-Achse abhängt. Aus den Diagrammen lässt sich die Abhängigkeit von χ^2 vom jeweiligen Parameter erkennen. Da jedes Diagramm sowohl mit den vom MCMC (jeweils links in den Abbildungen) und vom HOMCMC (rechts) erzeugten Punkten erstellt wurde, lassen sich diese beiden gut vergleichen.

Auffällig ist, dass von allen Parametern außer M_A und $\tan\beta$ mit dem HOMCMC sowohl positive als auch negative Werte gefunden wurden, während der MCMC nie das Vorzeichen wechselte. Allerdings sind M_1 und μ die einzigen hier variierten Parameter, für die Werte beiderseits des Vorzeichens durch die Eingabe (Tabelle 4.1) zugelassen werden. Daher ist es nur bei diesen beiden Parametern ungünstig, dass bei einem Vorzeichen nur wenige Punkte gefunden wurden.

Auch bei alleiniger Betrachtung des Vorzeichens, das auch vom MCMC untersucht wurde, zeigt sich, dass der HOMCMC einen größeren Bereich im jeweiligen Parameter untersucht hat. Beides, der Wechsel des Vorzeichens und die Größe des untersuchten Intervalls, lassen sich darauf zurückführen, dass beim MCMC die Größe der Unsicherheiten zu klein gewählt wurde.

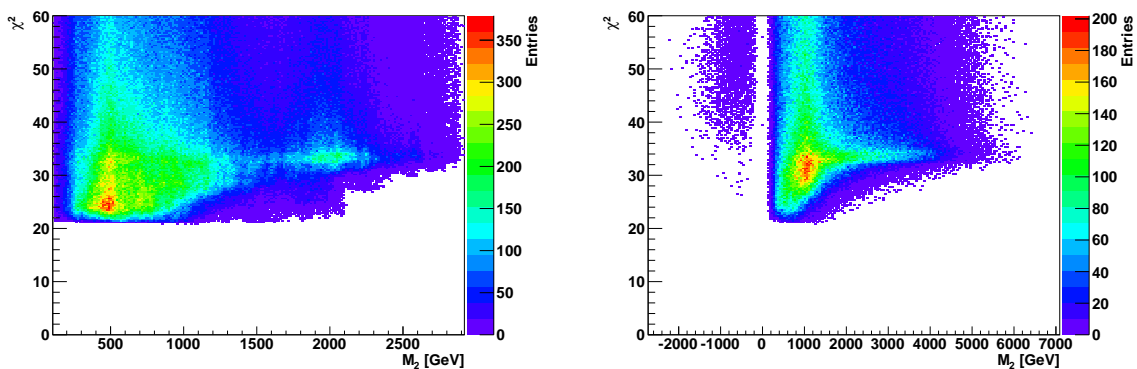


Abbildung A.1: χ^2 in Abhängigkeit von M_2 . Das Profil ist in einem weiten Bereich (zwischen 100 GeV und 2000 GeV) sehr flach.

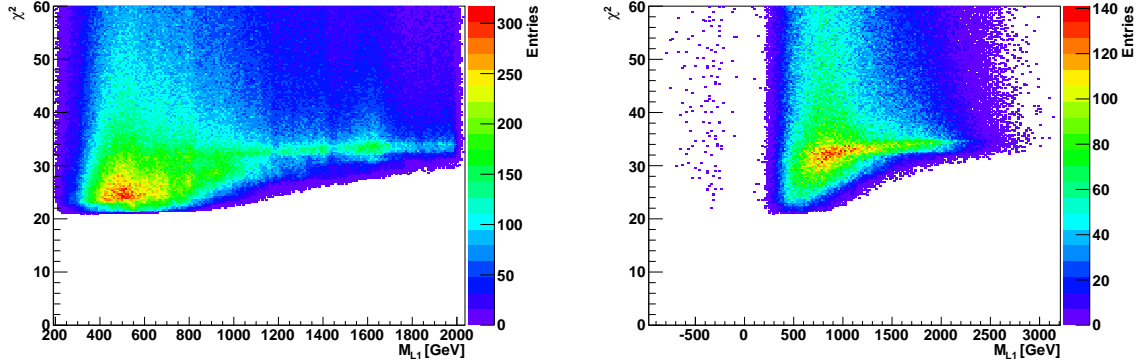


Abbildung A.2: χ^2 in Abhängigkeit von m_{l_1} . Hierbei hat der HOMCMC nur sehr wenige Punkte mit negativen Werten des Parameters erzeugt.

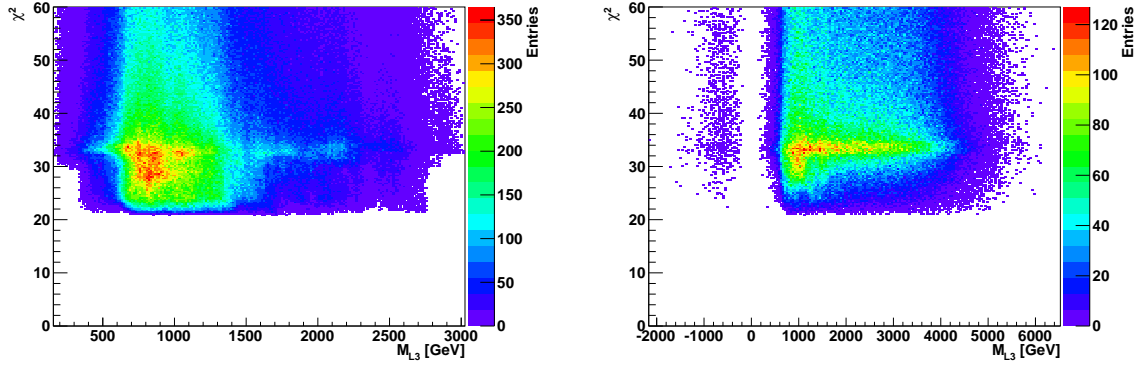


Abbildung A.3: χ^2 in Abhängigkeit von m_{l_3} . Während die Untergrenze der Kontur für $m_{l_3} \lesssim 400$ GeV merklich ansteigt, ist sie über einen sehr weiten Bereich (ungefähr von 400 GeV bis 5000 GeV) äußerst flach.

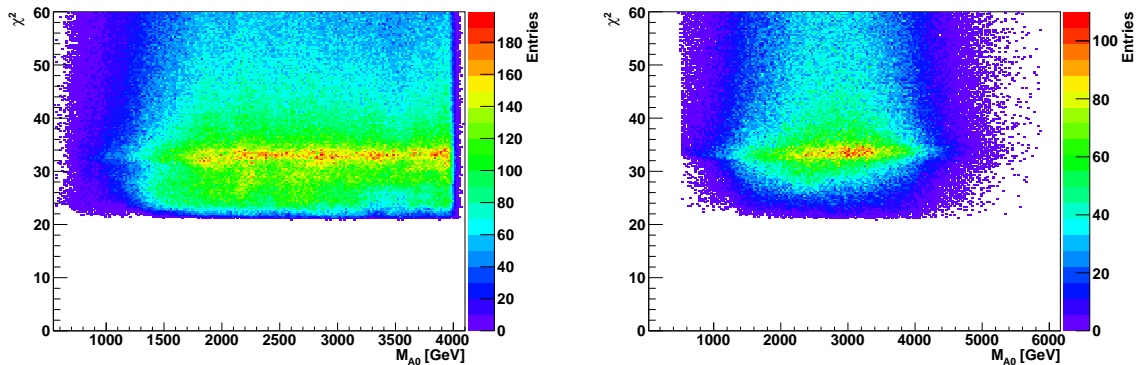


Abbildung A.4: Auftragung von χ^2 gegen M_A . Hierbei hat weder der MCMC noch der HOMCMC negative Werte von M_A gefunden. Dies liegt daran, dass schon Punkte mit $M_A \gtrsim 500$ GeV ein merklich erhöhtes χ^2 haben und somit eine sehr große Unsicherheit auf M_A zum Finden negativer Werte nötig wäre. Im Bereich $600 \text{ GeV} \lesssim M_A \lesssim 4500 \text{ GeV}$ ist die Untergrenze der Kontur sehr flach.

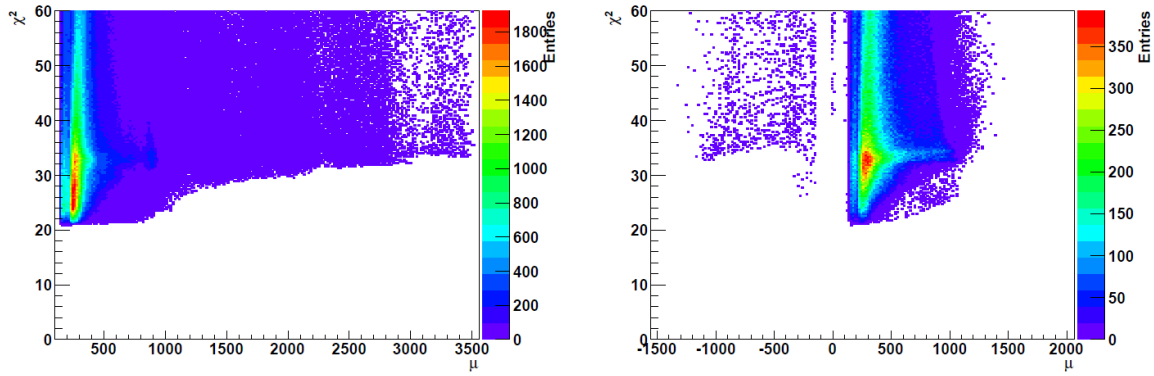


Abbildung A.5: χ^2 in Abhängigkeit von μ . Während auch hier der HOMCMC im Gegensatz zum MCMC negative Werte des Parameters erzeugt hat, ist der MCMC bis zu deutlich größeren positiven Werten von μ gekommen und stellt in dieser Hinsicht eine Ausnahme dar. Der Bereich mit Werten von $\mu \lesssim 1000$ zeichnet sich durch ein niedriges mögliches χ^2 aus, oberhalb steigt es merklich an.

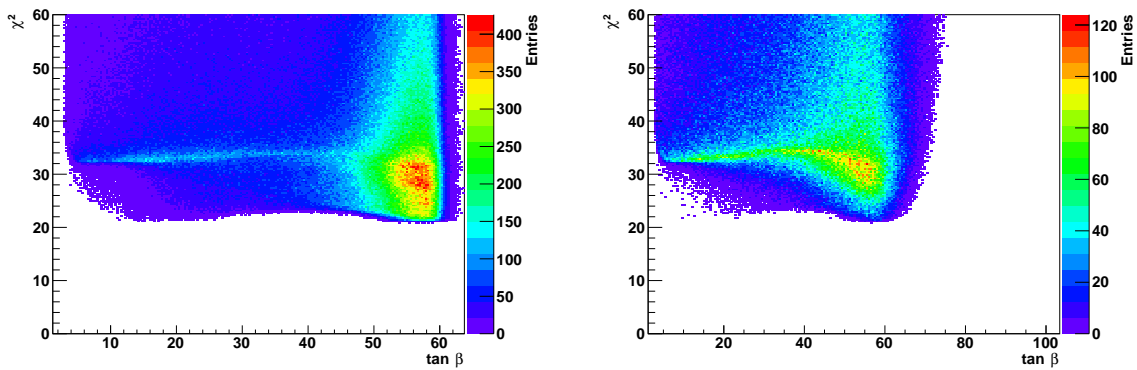


Abbildung A.6: Verteilung der Punkte in $\tan\beta$ und χ^2 . Während die Untergrenze von knapp über 0 bei MCMC und HOMCMC so gut wie gleich ist, ist die Obergrenze mit 65 bzw. 105 sehr verschieden. Sowohl in der Nähe von $\tan\beta \approx 15$ als auch $\tan\beta \approx 60$ sind besonders niedrige Werte von χ^2 möglich, wobei ersteres vom HOMCMC nicht gut untersucht wurde.

Literatur

- [1] S. L. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579 (siehe S. 3).
- [2] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions*, Conf. Proc. **C680519** (1968) 367 (siehe S. 3).
- [3] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264 (siehe S. 3).
- [4] S. P. Martin, *A Supersymmetry primer*, (1997), [Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.18,1(1998)], arXiv: [hep-ph/9709356](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356) [[hep-ph](#)] (siehe S. 3, 4).
- [5] B. Povh et al., *Teilchen und Kerne - eine Einführung in die physikalischen Konzepte. 9. Auflage*, Springer-Verlag, 2014, ISBN: 978-3-642-37821-8 (siehe S. 3, 7).
- [6] C. Berger, *Elementarteilchenphysik - Von den Grundlagen zu den modernen Experimenten. Dritte aktualisierte und überarbeitete Auflage*, Springer-Verlag, 2014, ISBN: 978-3-642-41752-8 (siehe S. 4, 6).
- [7] F. Halzen und A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, Wiley, 1984, ISBN: 9780471887416 (siehe S. 4).
- [8] P. Schneider, *Einführung in die extragalaktische Astronomie und Kosmologie*, Springer, 2007, ISBN: 978-3-540-25832-2 (siehe S. 4, 15).
- [9] K. A. Olive u. a., *Review of Particle Physics*, *Chin. Phys.* **C38** (2014) 090001 (siehe S. 6, 7).
- [10] P. Bechtle, K. Desch und P. Wienemann, *Fittino, a program for determining MSSM parameters from collider observables using an iterative method*, *Comput. Phys. Commun.* **174** (2006) 47, arXiv: [hep-ph/0412012](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0412012) [[hep-ph](#)] (siehe S. 6).
- [11] P. Bechtle u. a., *Killing the cMSSM softly*, *Eur. Phys. J.* **C76.2** (2016) 96, arXiv: [1508.05951](https://arxiv.org/abs/1508.05951) [[hep-ph](#)] (siehe S. 6, 7, 9, 44).
- [12] Fittino, *Fittino Class Reference*, URL: <http://fittino-doc.physik.uni-bonn.de> (siehe S. 6, 8, 9).
- [13] CMS und L. Collaborations, *Combination of results on the rare decays $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*, (2013) (siehe S. 7).
- [14] Y. Amhis u. a., *Averages of B-Hadron, C-Hadron, and tau-lepton properties as of early 2012*, (2012), arXiv: [1207.1158](https://arxiv.org/abs/1207.1158) [[hep-ex](#)] (siehe S. 7).
- [15] J. Beringer u. a., *Review of Particle Physics (RPP)*, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 010001 (siehe S. 7).
- [16] G. W. Bennett u. a., *Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL*, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 072003, arXiv: [hep-ex/0602035](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0602035) [[hep-ex](#)] (siehe S. 7).

- [17] M. Davier u. a., *Reevaluation of the Hadronic Contributions to the Muon $g-2$ and to $\alpha(MZ)$* , *Eur. Phys. J. C* **71** (2011) 1515, [Erratum: *Eur. Phys. J. C* **72**, 1874 (2012)], arXiv: [1010.4180 \[hep-ph\]](#) (siehe S. 7).
- [18] T. E. W. Group, *2012 Update of the Combination of CDF and D0 Results for the Mass of the W Boson*, (2012), arXiv: [1204.0042 \[hep-ex\]](#) (siehe S. 7).
- [19] S. Schael u. a., *Precision electroweak measurements on the Z resonance*, *Phys. Rept.* **427** (2006) 257, arXiv: [hep-ex/0509008 \[hep-ex\]](#) (siehe S. 7).
- [20] *First combination of Tevatron and LHC measurements of the top-quark mass*, (2014), arXiv: [1403.4427 \[hep-ex\]](#) (siehe S. 7).
- [21] P. A. R. Ade u. a., *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, *Astron. Astrophys.* **571** (2014) A16, arXiv: [1303.5076 \[astro-ph.CO\]](#) (siehe S. 7).
- [22] A. Dedes, H. K. Dreiner und U. Nierste, *Correlation of $B_s \rightarrow \mu^+\mu^-$ and $(g-2)(\mu)$ in minimal supergravity*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 251804, arXiv: [hep-ph/0108037 \[hep-ph\]](#) (siehe S. 7).
- [23] P. Bechtle u. a., *HiggsSignals: Confronting arbitrary Higgs sectors with measurements at the Tevatron and the LHC*, *Eur. Phys. J. C* **74.2** (2014) 2711, arXiv: [1305.1933 \[hep-ph\]](#) (siehe S. 7).
- [24] P. Bechtle u. a., *HiggsBounds: Confronting Arbitrary Higgs Sectors with Exclusion Bounds from LEP and the Tevatron*, *Comput. Phys. Commun.* **181** (2010) 138, arXiv: [0811.4169 \[hep-ph\]](#) (siehe S. 7).
- [25] J. M. Thijssen, *Computational Physics*, 2. Aufl., Cambridge University Press, 2007, ISBN: 978-0-521-83346-2 (siehe S. 8).
- [26] R. Barlow, *Statistics - A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences*, John Wiley & Sons, 1989, ISBN: 0 471 92294 3 (siehe S. 10).
- [27] G. Cowan, *Statistical Data Analysis*, Oxford University Press, 1998, ISBN: 0-19-850156-0 (siehe S. 10).
- [28] ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL Experiments, *note LEPSUSYWG/01-03.1*, URL: http://lepsusy.web.cern.ch/lepsusy/www/inos_moriond01/charginos_pub.html (siehe S. 14).

Abbildungsverzeichnis

3.1	χ^2 -Profile in Abhängigkeit von M_1 und M_2	14
3.2	χ^2 -Beiträge für variiertes M_2	15
3.3	χ^2 -Beiträge für variiertes M_2 , Ausschnitt	16
3.4	χ^2 -Beiträge für variiertes M_1	17
3.5	Korrelation gegen die Iterationszahl, Kette 100. Ordnung	24
3.6	Korrelation gegen die Iterationszahl, weitere Kette 100. Ordnung	24
3.7	Korrelation gegen die Iterationszahl, Kette 500. Ordnung	25
3.8	Korrelationskoeffizient gegen M_1 und M_2 aufgetragen, zweidimensionaler Fall	25
4.1	χ^2 gegen M_1	29
4.2	Fehler auf M_1	30
4.3	χ^2 gegen M_1 für eine Kette	31
4.4	M_1 - M_2 - χ^2 -Profil der siebendimensionalen Untersuchung	32
4.5	Korrelation zwischen M_1 und M_2 gegen die Iterationszahl im siebendimensionalen Fall	35
4.6	Korrelationskoeffizient zwischen M_1 und M_2 gegen die Parameter aufgetragen	36
4.7	Korrelation zwischen M_1 und μ	37
4.8	Korrelation zwischen M_1 und μ gegen die Iterationszahl im siebendimensionalen Fall	38
4.9	M_1 - M_2 - χ^2 -Profil der siebendimensionalen Untersuchung	38
4.10	Korrelation zwischen M_1 und μ	39
4.11	Korrelation zwischen $m_{\bar{1}}$ und M_1	40
4.12	Korrelation zwischen M_1 und μ	40
4.13	Korrelation zwischen $m_{\bar{1}}$ und μ gegen die Iterationszahl im siebendimensionalen Fall	41
A.1	χ^2 gegen M_2	45
A.2	χ^2 gegen $m_{\bar{1}}$	46
A.3	χ^2 gegen $m_{\bar{3}}$	46
A.4	χ^2 in Abhängigkeit von M_A	46
A.5	χ^2 gegen μ	47
A.6	χ^2 gegen $\tan\beta$	47

Tabellenverzeichnis

2.1	Fittino-Observablen	7
3.1	Startbedingungen der zweidimensionalen Untersuchungen	14
3.2	Vergleich der Effizienz von MCMC und HOMCMC	18
3.3	Größe der Intervalle mit niedrigem χ^2	19
3.4	Effizienzvergleich von MCMC und HOMCMC für $M_1 < -350$ GeV	21
3.5	Größe der Intervalle mit niedrigem χ^2 und hohem M_1	23
4.1	Startbedingungen der siebendimensionalen Untersuchungen	28
4.2	Effizienzkriterien in sieben Dimensionen	33
4.3	Größe der Intervalle mit niedrigem χ^2	34