

# Studie zur Rekonstruktion der mSUGRA-Parameter aus LHC-Observablen mit Fittino

## **Diplomarbeit in Physik**

von Mathias Uhlenbrock

Bonn, 5. Mai 2010

Referent: Prof. Dr. Klaus Desch  
Koreferent: Prof. Dr. Volker Büscher

Physikalisches Institut  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Das Standardmodell</b>	<b>3</b>
1.1 Freie Lagrange-Dichten	3
1.2 Eichinvarianz	5
1.3 Der Higgs-Mechanismus	6
1.4 Die freien Parameter des Standardmodells	10
1.5 Schwächen des Standardmodells	11
<b>2 Supersymmetrie</b>	<b>15</b>
2.1 Theorie ohne Wechselwirkungen	15
2.2 Das Wess-Zumino-Modell	17
2.3 Superfelder	20
2.4 Eichwechselwirkungen	20
2.5 Das MSSM	21
2.6 R-Parität	22
2.7 SUSY-Brechung	24
<b>3 Parameterrekonstruktion mit Fittino</b>	<b>27</b>
3.1 Allgemeine Bemerkungen	27
3.2 Die Funktionsweise von Fittino	30
3.3 Funktionsoptimierung mit MINUIT	31
3.3.1 MIGRAD	31
3.3.2 SIMPLEX	33
3.4 Markov-Ketten-Monte-Carlo-Verfahren (MKMC)	35
3.4.1 Der Metropolis-Hastings-Algorithmus/Simulated Annealing	36
3.4.2 Likelihood-Karten	38
3.5 Erste Studien mit Fittino	42
<b>4 Observable am LHC</b>	<b>45</b>
4.1 Der Parameterpunkt SPS1a	45
4.1.1 Kinematische Massenkanten	46
4.1.2 Die Masse des Gluinos	52
4.1.3 Die Masse des Sbottom-Quark	53
4.1.4 Die Masse des Slepton $\tilde{\ell}_L$	55
4.1.5 Kinematische Kanten mit schweren Gauginos	56
4.1.6 Die Masse des Squarks $\tilde{q}_R$	57
4.1.7 Messungen im Stop-Sektor	58

4.1.8	Die Masse des Chargino $\chi_1^\pm$	60
4.2	Weitere Observable	61
4.3	Luminosität	63
4.4	Fehlerkorrelationen	63
4.5	Elemente der Statistik	64
<b>5</b>	<b>Rekonstruktion für den mSUGRA-Punkt SPS1a</b>	<b>69</b>
5.1	Rekonstruktion aus LHC-Observablen	69
5.2	Rekonstruktion mit gestreuten Observablen	73
5.3	Likelihood-Karten	87
5.4	Hypothesenüberprüfung für $\text{sign}\mu$	87
5.5	Fit mit Niederenergieobservablen	91
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>99</b>
	<b>Erklärung</b>	<b>105</b>

# Einleitung

Die Bemühungen des Menschen, die Vielzahl der in seiner Umgebung beobachteten Phänomene systematisch zu ordnen und diese auf möglichst wenige gemeinsame Prinzipien zurückzuführen, haben sich in der Vergangenheit als äußerst erfolgreich erwiesen und zu einem tiefen Verständnis der zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten geführt. So lassen sich nach dem heutigen Kenntnisstand alle Naturvorgänge letztendlich durch das Zusammenspiel zweier grundsätzlich verschiedenen Arten von Teilchen erklären: alle Materie ist aus Kombinationen von 12 Fermionen aufgebaut, die sich nicht aus weiteren Untereinheiten zusammensetzen, in diesem Sinne also als elementar angesehen werden können, und wechselwirken miteinander über vier fundamentale Kräfte durch den gegenseitigen Austausch von Bosonen: die Gravitationskraft, die elektromagnetische Kraft, die schwache Kraft und die starke Kraft.

Die Vorhersagen dieses Standardmodells der elementaren Teilchen zusammen mit der Relativitätstheorie der Gravitation haben sich immer wieder in eindrucksvoller Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund erwiesen. Dennoch bleiben eine ganze Reihe von Fragen zum Energieinhalt des Universums, zum Verhältnis von Materie zu Antimaterie, zur Generationenstruktur der Fermionen oder zu einer weitergehenden Vereinheitlichung der Grundkräfte bislang unbeantwortet.

Erstaunlicherweise lassen sich gleich mehrere dieser Schwierigkeiten durch die Hinzunahme eines einzigen zusätzlichen Prinzips lösen, welches die Fermionen und Bosonen über eine sogenannte Supersymmetrie (SUSY) miteinander verknüpft.

Messungen zukünftiger Beschleunigerexperimente, z. B. an dem in Kürze in Betrieb gehenden LHC (Large Hadron Collider) oder dem ILC (International Linear Collider), werden entscheiden können, ob das um Supersymmetrie erweiterte Standardmodell bei Energien im TeV-Bereich (Teraelektronenvolt,  $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ ) in der Natur realisiert ist. Im positiven Fall ist die Rekonstruktion der Parameter der zugehörigen Lagrange-Dichte durch einen globalen Fit an einen gegebenen Satz von Observablen von großem Interesse. Mit Fittino steht eine Software zur Verfügung, die eine solche Untersuchung ggf. hochdimensionaler Parameterräume ohne a-priori-Annahmen ermöglicht. Vorgestellt wird eine Studie zur Bestimmung der Parameter der minimalen Supergravitation (mSUGRA), eines bestimmten supersymmetrischen Szenarios, aus Observablen, wie man sie am LHC zu messen erwartet. Hierbei wird insbesondere der Einfluss der Korrelationen der Observablen durch gemeinsame systematische Fehler berücksichtigt. Die Rekonstruktion soll für verschiedene integrierte Luminositäten erfolgen, um die zunehmende Einschränkung des gültigen Parameterraums mit fortschreitender Laufzeit der Experimente nachzuempfinden.

Diese Arbeit ist wie folgt organisiert: die Kapitel 1 und 2 führen in die grundlegenden Konzepte des Standardmodells und seiner supersymmetrischen Erweiterung ein. Besondere Aufmerksamkeit gilt hier der Identifikation der freien Parameter der Lagrange-Dichte des jeweiligen Modells. Im Mittelpunkt von Kapitel 3 stehen dann die in Fittino implementierten Methoden und Algorithmen, welche für die Parameterrekonstruktion benötigt werden. Kapitel 4 fasst die verfügbaren Studien mit simulierten Daten zu den am LHC beobachtbaren Observablen supersymmetrischer Prozesse zusammen. Schließlich werden in Kapitel 5 die Ergebnisse präsentiert, die bei der Rekonstruktio-

on der mSUGRA-Parameter aus den LHC-Observablen für den Parameterpunkt SPS1a erhalten wurden.

# Kapitel 1

## Das Standardmodell

Die Eigenschaften der Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen werden durch das Standardmodell im Rahmen von renormierbaren Quantenfeldtheorien beschrieben. Das vorliegende Kapitel soll zunächst als Einführung in den zugrunde liegenden Formalismus dienen. Ausgehend von freien Feldern der beteiligten Partikel wird die Theorie über die Forderung nach gewissen Eichsymmetrien um Wechselwirkungen ergänzt. Ein weiterer Abschnitt befasst sich mit der Erzeugung von Teilchenmassen durch spontane Symmetriebrechung durch den Higgs-Mechanismus. Besondere Aufmerksamkeit kommt der Herausstellung der freien Parameter des Standardmodells zu, deren Werte nicht von der Theorie vorhergesagt werden, sondern sich ausschließlich durch die Messung im Experiment bestimmen lassen. Abschließend wird auf eine Reihe von offenen Fragen hingewiesen, die nur durch eine geeignete Modifikation des Standardmodells beantwortet werden können.

### 1.1 Freie Lagrange-Dichten

Das Standardmodell kann mit Hilfe sogenannter Lagrange-Dichten  $\mathcal{L}$  formuliert werden [39]. Diese sind Funktionen von Quantenfeldern  $\varphi_i$ , welche die in der Theorie vorkommenden Teilchen beschreiben, und ihrer Ableitungen:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i). \quad (1.1)$$

Die Bewegungsgleichungen werden durch die Euler-Lagrange-Beziehung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} = 0 \quad (1.2)$$

aus der Lagrange-Dichte erhalten, da deren Lösungen nach dem Hamiltonischen Prinzip die Wirkung

$$S(\Omega) = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) \quad (1.3)$$

minimieren. Die freie, also wechselwirkungslose Lagrange-Dichte für masselose, geladene Bosonen mit Spin 0 ist nun gegeben durch

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_i^* \partial^\mu \phi_i, \quad (1.4)$$

in welcher die  $\phi_i$  komplexwertige skalare Felder sind, und führt auf die Klein-Gordon-Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi_i = 0 \quad (1.5)$$

und

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi_i^* = 0. \quad (1.6)$$

Griechische Indizes durchlaufen in der hier angegebenen kovarianten Notation wie üblich die Werte 0-3.

Die freie Lagrange-Dichte für masselose Fermionen lautet hingegen

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_j i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j \quad (1.7)$$

und hat die Dirac-Gleichungen

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j = 0 \quad (1.8)$$

und

$$\partial_\mu \bar{\psi}_j i\gamma^\mu = 0 \quad (1.9)$$

für die vierkomponentigen komplexwertigen Spinor-Felder  $\psi_j$  zur Folge, wobei

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.10)$$

ist mit den Gamma-Matrizen  $\gamma^\mu$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

und den Pauli-Matrizen  $\sigma^i$ :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

(Bemerkung: Für den Spezialfall der hier angegebenen masselosen Dirac- oder Weyl-Gleichung entkoppeln die links- und rechtshändigen Komponenten des Vierer-Spinors und die Lagrange-Dichten von der Form (1.7) lassen sich getrennt für beide angeben). Die freie Lagrange-Dichte für Vektorbosonen (Spin 1) lautet schließlich

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (1.13)$$

mit dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.14)$$

in dem die  $f^{abc}$  allgemein als Strukturfunktionen bezeichnet werden, woraus die Laplace-Gleichungen

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\mu^a = 0 \quad (1.15)$$

für die Vektorpotenziale  $A_\mu^a$  erhalten werden. Hiermit sind die freien Lagrange-Dichten für alle im Standardmodell vorkommenden Teilchensorten behandelt. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie Wechselwirkungen zwischen den Teilchen aus Symmetriebeziehungen folgen.



## 1.2 Eichinvarianz

Transformationen der Felder, welche die Form der Bewegungsgleichungen unverändert lassen, werden auch als Symmetrien bezeichnet. Die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen werden im Formalismus des Standardmodells durch die Forderung nach der Invarianz der Bewegungsgleichungen unter bestimmten, sogenannten lokalen Eichtransformationen eingeführt. Dabei handelt es sich um die Elemente  $U$  der unitären Lie-Gruppen  $U(1)$ ,  $SU(2)$  und  $SU(3)$ , die sich jeweils für die elektromagnetische Kraft, die schwache Kraft und die starke Kraft verantwortlich zeichnen. Es gilt dann für die transformierten Felder  $\varphi'$

$$\varphi' = U\varphi. \quad (1.16)$$

Im Allgemeinen hat eine solche Transformation die Form

$$U = \exp\left(ig \sum_i \alpha_i(x^\mu) G_i\right), \quad (1.17)$$

wobei die  $\alpha_i$  Raumzeit-abhängige kontinuierliche Parameter,  $g$  die Kopplungskonstante und die  $G_i$  die hermiteschen Generatoren der Gruppe darstellen. Eine Besonderheit der Lie-Gruppen ist es nun, dass sich alle ihre Eigenschaften aus der Betrachtung der infinitesimalen Transformation (Parameter  $\epsilon$ )

$$\varphi' = (1 + \delta_\epsilon)\varphi \quad (1.18)$$

ergeben mit

$$\delta_\epsilon = ig \sum_i \epsilon_i(x^\mu) G_i. \quad (1.19)$$

Es hat sich gezeigt, dass die elektromagnetische Kraft und die schwache Kraft als zwei unterschiedliche Manifestationen einer vereinheitlichten elektroschwachen Kraft aufgefasst werden können (Glashow-Salam-Weinberg-Modell, GSW-Modell). Um diese Wechselwirkung zu beschreiben, wird die Invarianz der Lagrange-Dichte unter der kombinierten Gruppe  $U(1) \otimes SU(2)$  vorausgesetzt.

Die freien Lagrange-Dichten sind nicht invariant unter diesen Eichtransformationen. Vielmehr müssen diese um Terme erweitert werden, welche Produkte von Feldern enthalten und damit die gegenseitigen Wechselwirkungen der Teilchen darstellen. Üblicherweise werden dazu die partiellen Ableitungen in den freien Lagrange-Dichten durch sogenannte kovariante Ableitungen ersetzt. So ist der Übergang

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau}{2} \mathbf{W} + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \quad (1.20)$$

mit den elektroschwachen Kopplungskonstanten  $g$  und  $g'$ , der Hyperladung  $Y$ , den (Iso-spin-) Pauli-Matrizen  $\tau_i$  und den elektroschwachen Generatoren  $\mathbf{W}$  und  $B$  durchzuführen, um im Rahmen der elektroschwachen Theorie die Invarianz unter  $U(1) \otimes SU(2)$ -Transformationen zu gewährleisten und

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_a \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a \quad (1.21)$$

mit der starken Kopplungskonstanten  $g_s$ , den Generatoren  $A^a$  und den Gell-Mann-Matri-zen  $\lambda^a$  für die Invarianz unter  $SU(3)$ . Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Quantenchromodynamik (QCD). Die Werte der Kopplungskonstanten sind nicht durch die Theorie festgelegt und können daher nur experimentell bestimmt werden. Damit sind die ersten drei freien Parameter des Standardmodells identifiziert.

Der Teilcheninhalt ist in den Tabellen 1.1 und 1.2 zusammengefasst. Bei den 12 Fermionen unterscheidet man zwischen Quarks und Leptonen, welche in jeweils drei Generationen oder Familien angeordnet werden können. Die linkshändigen, schwachen Isospin tragenden Fermionen bilden ein Dublett und nehmen an der schwachen Wechselwirkung teil, während die rechtshändigen Fermionen Iso-Singulets sind und nicht der schwachen Kraft unterliegen. Für jeden Generator der entsprechenden Eichgruppe existiert schließlich ein zugehöriges Austauschboson.

### 1.3 Der Higgs-Mechanismus

Mit expliziten Massentermen der Form  $M^2\varphi^\dagger\varphi$  wäre die Eichinvarianz verletzt und die Lagrange-Dichte nicht mehr renormierbar. Der in diesem Abschnitt (nach [27]) beschriebene Higgs-Mechanismus erzeugt Massenterme für die elektroschwachen Eichbosonen und die Fermionen durch die spontane Brechung der  $U(1) \otimes SU(2)$ -Symmetrie über die Kopplung an ein skalares Feld. Die Werte für die Teilchenmassen gehen als zusätzliche freie Parameter in die Theorie ein. Der Higgs-Mechanismus ist damit ein erstes Beispiel für die Erhöhung der Anzahl der freien Parameter durch Symmetriebrechung.

Im Higgs-Mechanismus wird ein Dublett von komplexen Feldern postuliert, welches für jeden der vier Generatoren der zu brechenden  $U(1) \otimes SU(2)$ -Symmetrie einen Freiheitsgrad aufweist. Eine Lagrange-Dichte von der Form

$$\mathcal{L} = \left( \partial_\mu \phi + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}_\mu \phi + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \phi \right)^\dagger \left( \partial^\mu \phi + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu \phi + ig' \frac{Y}{2} B^\mu \phi \right) \quad (1.22)$$

$$- V(\phi) - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (1.23)$$

mit

$$\phi \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

und insbesondere das Higgs-Potenzial

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.25)$$

mit  $\mu^2 < 0$ ,  $\lambda > 0$  ist invariant gegenüber  $U(1) \otimes SU(2)$ -Transformationen (siehe auch Abbildung 1.1). Das Higgspotenzial wird minimal für

$$\phi^\dagger \phi \equiv \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{2\lambda}. \quad (1.26)$$

Unter allen möglichen Grundzuständen wird der Einfachheit

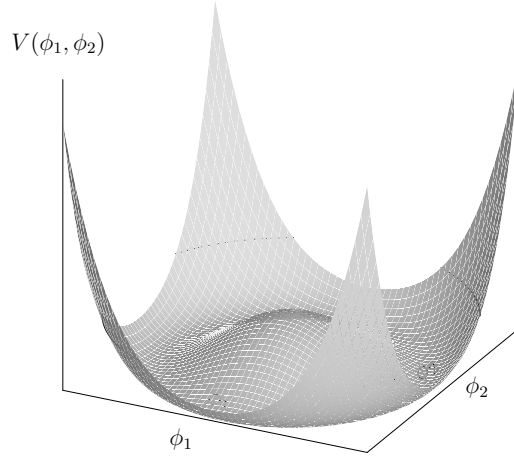
$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \quad \phi_3^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \quad (1.27)$$

Fermionen						
Quarks	Flavour	Masse (GeV)	elektrische Ladung (e)	Farbe	schwacher Isospin	Spin
	u	$1.5 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3}$	2/3	r,g,b	1/2	$\frac{1}{2}$
	d	$3 \cdot 10^{-3} - 7 \cdot 10^{-3}$	-1/3		-1/2	
	c	$1.25 \pm 0.09$	2/3		1/2	
	s	$0.095 \pm 0.025$	-1/3		-1/2	
	t	$174.2 \pm 3.3$	2/3		1/2	
	b	$4.2 \pm 0.07$	-1/3		-1/2	
Leptonen	Lepton	Masse (MeV)	elektrische Ladung (e)	Farbe	schwacher Isospin	Spin
	$\nu_e$	$< 3 \text{ eV}$	0	-	1/2	$\frac{1}{2}$
	e	0.51099893(4)	-1		-1/2	
	$\nu_\mu$	$< 0.19$	0		1/2	
	$\mu$	105.658369(9)	-1		-1/2	
	$\nu_\tau$	$< 18.2$	0		1/2	
	$\tau$	$1776.99 \pm 0.29 - 0.26$	-1		-1/2	

**Tabelle 1.1:** Teilcheninhalt des Standardmodells 1: Fermionen. Die angegebenen Werte für die Massen sind [25] entnommen (Stand: Juli 2007). Die verwendeten Abkürzungen bedeuten im Einzelnen: u(p), d(own), s(trange), c(harm), b(ottom), t(op) für die Quark-Flavours; r(ot), g(rün), b(lau) für die Farbladungen; e Elektron,  $\nu_e$  Elektron-Neutrino,  $\mu$  Myon,  $\nu_\mu$  Myon-Neutrino,  $\tau$  Tau,  $\nu_\tau$  Tau-Neutrino. Die Leptonen besitzen keine Farbladung und nehmen daher nicht an der starken Wechselwirkung teil.

Bosonen				
Wechselwirkung	Kopplung	Austauschteilchen	Masse (GeV)	Spin
Starke Kraft	Farbe	8 Gluonen	0	1
Elektromagnetische Kraft	elektrische Ladung	Photon	$< 6 \cdot 10^{-17}$	
Schwache Kraft	schwacher Isospin	W	$80.403 \pm 0.029$	
		Z <sup>0</sup>	$91.1876 \pm 0.0021$	

**Tabelle 1.2:** Eigenschaften der Elementarteilchen 2: Bosonen. Die Bosonen mit Spin 1 sind die Austauschteilchen der fundamentalen Wechselwirkungen. Gluonen, die W-Bosonen und das Z<sup>0</sup>-Boson sind im Gegensatz zum Photon selbst Träger der Ladung, an die sie koppeln. Daher kommt es bei diesen Kräften zu Selbstwechselwirkung (Massen aus [25] (Stand: Juli 2007).



**Abbildung 1.1:** Das Higgs-Potenzial ist symmetrisch unter  $U(1) \otimes SU(2)$ -Transformationen, welche in der gezeigten Abbildung einer Rotation um die z-Achse entsprechen. Das Potenzial nimmt sein Minimum in den Punkten der kreisförmigen Rinne um den Koordinatenursprung an, der Grundzustand ist also entartet.

gewählt und damit ist

$$\phi_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Die Entwicklung des Higgs-Feldes um diesen Grundzustand lautet nun in erster Ordnung

$$\phi(x) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

mit dem Vakuumerwartungswert  $v$ . Wird dieser Ausdruck in die Lagrange-Dichte (1.23) eingesetzt, so ist diese nicht länger symmetrisch unter  $U(1) \otimes SU(2)$ -Transformationen; man sagt, die Symmetrie sei gebrochen. Die Terme

$$\begin{aligned} \left| \left( -ig \frac{\tau}{2} \mathbf{W}_\mu - ig' \frac{1}{2} B_\mu \right) \phi \right|^2 &= \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left( \frac{1}{2} gv \right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\ &\quad + \frac{1}{8} v^2 (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$W_\mu^\pm = W_\mu^1 \mp W_\mu^2 \quad (1.30)$$

haben nun die Form von Massetermen für die zwei W-Bosonen mit der Masse

$$M_W = \frac{1}{2} vg \quad (1.31)$$

und diagonalisieren der Matrix in  $W^{(3)}$  und  $B$  führt auf die richtigen Masseneigenzustände mit

$$M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}, \quad (1.32)$$

der Masse des  $Z^0$ -Bosons und

$$M_\gamma = 0 \quad (1.33)$$

der Masse des Photons. Der Vakuumerwartungswert  $v$  hängt über

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \quad (1.34)$$

mit der Masse des W-Bosons bzw. der Fermi-Konstante  $G_F$  zusammen und ergibt sich zu  $v = 246$  GeV.

Die Massen der Fermionen werden schließlich durch Hinzufügen von Yukawa-Kopplungen

$$\mathcal{L} = -G_f \left[ \bar{L} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} R + \bar{R}(\phi^-, \bar{\phi}^0)L \right] \quad (1.35)$$

mit Fermion-Kopplungskonstante  $G_f$  zur Lagrange-Dichte des Standardmodells erhalten, wobei  $L$  die links-händigen Iso-Doublets und  $R$  die rechtshändigen Iso-Singulets bezeichnen. Diese Kopplungen der linkshändigen Teilchen an ihr rechtshändiges Gegenstück entspricht dem von einem Masseterm für Fermionen erwarteten Verhalten. Die Entwicklung des Higgs-Feldes um den oben gewählten Grundzustand führt im Falle des Elektrons ( $L = e_L$ ,  $R = e_R$ ) auf

$$\mathcal{L} = -\frac{G_e}{\sqrt{2}}v(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{G_e}{\sqrt{2}}v(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)h \quad (1.36)$$

und auf entsprechende Terme für die anderen Leptonen und Quarks. Mit der Identifikation

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}} \quad (1.37)$$

der Elektronmasse  $m_e$  erhält man

$$\mathcal{L} = m_e \bar{e}e - \frac{m_e}{v} \bar{e}e h, \quad (1.38)$$

wobei

$$-m_e \bar{e}e = -m_e \bar{e} \left[ \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) + \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \right] e \quad (1.39)$$

$$= m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (1.40)$$

benutzt wurde.

## 1.4 Die freien Parameter des Standardmodells

Nach den Bemerkungen der vorhergehenden Abschnitte kann nun die vollständige La-grange-Dichte des Standardmodells zusammengefügt werden. Das GWS-Modell besteht danach aus den folgenden Beiträgen:

- Kinetische Terme und Selbstwechselwirkungen der  $W^\pm$  und des  $Z^0$ , kinetischer Term des Photons:

$$-\frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (1.41)$$

- Kinetische Terme der Leptonen und Quarks und ihre elektroschwachen Eichwechselwirkungen

$$\bar{L}i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\mathbf{W} + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) L + \bar{R}i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) R \quad (1.42)$$

- Kopplungen der  $W^\pm$  und des  $Z^0$  an das Higgs (Massenterme), Selbstwechselwirkungen des Higgs

$$-\left| \left( \partial_\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\mathbf{W} + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) \phi \right|^2 - V(\phi) \quad (1.43)$$

- Yukawa-Kopplungen der Leptonen und der Quarks an das Higgs (Massenterme)

$$-(G_1\bar{L}\phi R + G_2\bar{L}\phi_c R + \text{h.c.}) \quad (1.44)$$

und die QCD-Lagrange-Dichte ist

- Kinetische Terme und Selbstwechselwirkungen der Gluonen

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (1.45)$$

- Kinetische Terme der Quarks und ihre starken Eichwechselwirkungen

$$i \sum_q \bar{\psi}_q^i (D_\mu)_{ij} \psi_q^j \quad (1.46)$$

mit

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu + ig_S \sum_a \frac{\lambda_{ij}^a}{2} A_\mu^a. \quad (1.47)$$

Damit sind alle Eichwechselwirkungen und Yukawa-Kopplungen des Standardmodells charakterisiert.

Darüber hinaus mischen die elektroschwachen Zustände über die Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) zu den im Experiment gemessenen Masse-Eigenzuständen [27]. Die CKM-Matrix ist eine unitäre  $3 \times 3$ -Matrix definiert durch

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Die Einträge der CKM-Matrix gehören damit zu den freien Parametern. Aus Unitaritätsgründen sind von diesen allerdings nur vier unabhängig. Neutrinos werden im Standardmodell zunächst als masselos angenommen. Mittlerweile muss jedoch davon ausgegangen werden, dass Neutrinos eine kleine aber endliche Masse besitzen. Daher existiert auch eine Mischungsmatrix für Leptonen, die auch unter dem Namen P-MNS-Matrix [31] bekannt ist (nach Pontecorvo, Maki, Nakagawa und Sakata).

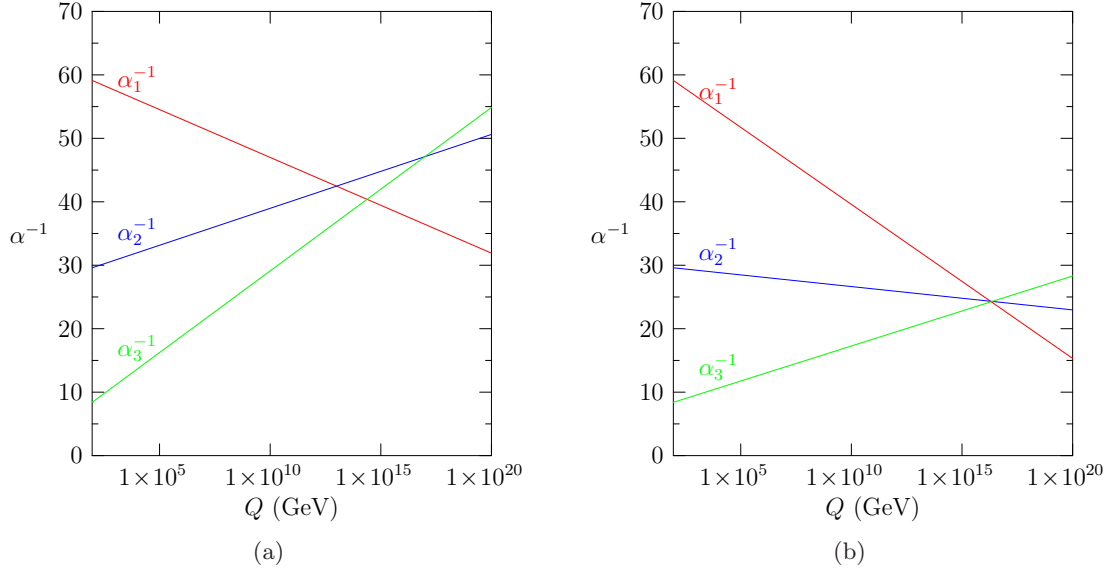
Zusammengefasst sind die 19 (28) Parameter des Standardmodells also:

- 3 Kopplungskonstanten:  $g$ ,  $g'$ ,  $g_s$
- 9 (12) Fermionenmassen  $m_f$
- die Higgs-Masse  $m_H$ , der Higgs-Vakuumerwartungswert  $v$
- starke CP-Phase  $\theta_{QCD}$
- 4 Parameter aus der CKM-Matrix für Quarks (3 Winkel, eine Phase)
- (6 Parameter aus der P-MNS-Matrix (3 Winkel, eine Dirac-Phase, 2 Majorana-Phasen))

## 1.5 Schwächen des Standardmodells

Obwohl der Großteil der theoretischen Vorhersagen des (um Neutrinomassen erweiterten) Standardmodells eindrucksvolle Bestätigung durch das Experiment erfahren hat, ist dennoch eine Reihe von offenen Fragen geblieben, von denen in diesem letzten Abschnitt einige der prominentesten herausgestellt sind. Auch soll, im Vorgriff auf das nächste Kapitel, aufgezeigt werden, wie sich viele der hier geschilderten Probleme mit der Einführung eines einzigen, weiteren Prinzips - das der Supersymmetrie - auf elegante Art und Weise lösen lassen.

Eine der stärksten Triebfedern physikalischer Untersuchungen ist die Suche nach den fundamentalen Zusammenhängen zunächst unabhängig voneinander scheinender Phänomene. So ist es im Rahmen der GWS-Theorie bereits gelungen, den Elektromagnetismus und die schwache Kraft auf eine gemeinsame Grundlage zurückzuführen, doch ist darüber hinaus eine Vereinheitlichung aller drei Kräfte des Standardmodells möglich? Der Verlauf der Kopplungskonstanten mit der Energieskala, auf der die Wechselwirkungen stattfinden, legt nahe, dass diese bei hohen Energien in der Größenordnung von  $10^{16}$  GeV den gleichen Wert annehmen, es dann nur noch eine einzige Kraft gibt. Die Entwicklung der Kopplungen, welche insbesondere von dem Teilcheninhalt einer Theorie abhängt, ist in Abbildung 1.2 für das Standardmodell und für dessen minimale supersymmetrische Erweiterung (MSSM), welche unter anderem ein erweitertes Teilchenspektrum voraussagt, zu sehen. Es ist unschwer zu erkennen, dass die Konvergenz im Falle des Standardmodells nur näherungsweise erfüllt ist, während Supersymmetrie überzeugend eine Vereinheitlichung der Kräfte bei hohen Energien impliziert [8].



**Abbildung 1.2:** Abhängigkeit der Kopplungskonstanten  $\alpha_1^{-1}$ ,  $\alpha_2^{-1}$  und  $\alpha_3^{-1}$  von der Energieskala  $Q$  (a) im Standardmodell und (b) in dessen minimaler supersymmetrischen Erweiterung (MSSM). Der Verlauf ist unter anderem eine Funktion des Teilcheninhalts der betrachteten Theorie. Eine Vereinheitlichung ist im Standardmodell nur näherungsweise gegeben und erfolgt erst durch die Erweiterung um Supersymmetrie. Die Abbildung zeigt ausschließlich die analytischen Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen in erster Ordnung (z.B. aus [7]).

Störungstheoretische Berechnungen in höherer Ordnung ergeben, dass zur Masse des Higgs-Teilchens betragsmäßig große Korrekturfaktoren beitragen [7]. In Abbildung 1.3 sind Beispiele für solche Prozesse zu sehen. Ein Diagramm, welches eine Fermionschleife enthält, modifiziert die Higgs-Masse um

$$\Delta m_H^2 = -\frac{|\lambda_f|^2}{8\pi^2} \Lambda_{UV}^2 + \dots \quad (1.49)$$

Hierbei ist  $\lambda_f$  die Kopplungsstärke des Higgs an das Fermion  $f$  und  $\Lambda_{UV}$  ist ein sogenannter Cut-Off-Term, der zur Behandlung von quadratischen Divergenzen eingeführt wird und von der Größenordnung der Planck-Masse ist. Ein solches Diagramm liefert also einen Beitrag von  $\sim 10^{38}$  GeV zur Higgs-Masse. Eine Schleife mit skalarem Teilchen  $S$  führt hingegen zu einer Korrektur

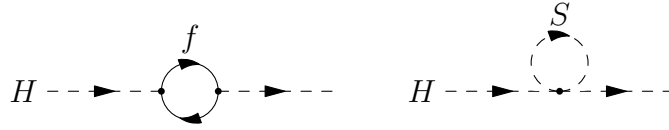
$$\Delta m_H^2 = \frac{\lambda_S^2}{16\pi^2} \Lambda_{UV}^2 + \dots, \quad (1.50)$$

wobei  $\lambda_S$  die entsprechende Kopplung des Higgs and das skalare Teilchen bezeichnet. Die jeweils sehr großen Beiträge erfordern eine sehr genaue Abstimmung, um eine effektive physikalische Higgs-Masse in der Größenordnung  $\sim 10^2$  GeV zu erhalten. In der Supersymmetrie existiert nun für jedes Fermion ein entsprechendes Boson, welches mit derselben Stärke an das Higgs koppelt ( $\lambda_f = \lambda_S$ ), so dass sich der jeweils resultierende Term

$$(\lambda_S^2 - |\lambda_f|^2) \Lambda_{UV}^2 \quad (1.51)$$



gerade zu null addiert.



**Abbildung 1.3:** Fermionische (links) und bosonische Schleifenkorrekturen tragen Terme in der Größenordnung  $\sim 10^{38}$  GeV mit unterschiedlichem Vorzeichen zur Higgs-Masse bei. Diese heben sich genau auf, wenn für jedes Fermion ein bosonisches Partnerteilchen existiert, welches die gleiche Kopplung an das Higgs aufweist.

Zahlreiche Indizien haben in den vergangenen Jahren die Vorstellung gefestigt, dass das Universum nur zu einem Bruchteil aus sichtbarer, also letztlich elektromagnetisch wechselwirkender, baryonischer Materie besteht, aus der sich die Sterne, Planeten und das interstellare Gas zusammensetzen. Insbesondere scheint es eine weitere Form von Materie zu geben, die sich (auf kosmischen Skalen) ausschließlich durch ihre gravitative Wirkung bemerkbar macht, also in diesem Sinne „dunkel“ ist [20]. Beispielsweise stimmen die gemessenen Rotationsgeschwindigkeiten von Himmelskörpern, die um das galaktische Zentrum der Milchstraße kreisen, nicht mit der Newtonschen Vorhersage überein, die sich durch eine Abschätzung der in Sternen und Gas vorhandenen Masse ergibt. Ähnliches trifft auch auf die Dynamik von Galaxienhaufen zu und Beobachtungen im Zusammenhang mit dem sogenannten Gravitationslinseneffekt, also der durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschriebenen Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld, lassen sich ebenfalls nicht durch die konventionellen Annahmen zum Masseinhalt des Universums erklären. Unter der Voraussetzung der allgemeinen Gültigkeit des Gravitationsgesetzes ist die Existenz eines oder mehrerer stabiler, massiver Teilchen, welche nicht elektromagnetisch wechselwirken, eine naheliegende Erklärungsmöglichkeit (sogenannte Wimps, Weakly Interacting Massive Particles). Zwar ist im Standardmodell mit dem Neutrino ein solches Teilchen bekannt, doch ist dessen Masse sehr klein, so dass dieses nur durch seine Kinematik einen bedeutenden Beitrag zur Energiedichte leisten kann („heiße“ Dunkle Materie, HDM). Modelle zur Galaxienentstehung legen jedoch nahe, dass es darüber hinaus noch eine Form von Dunkler Materie geben muss, die eine verhältnismäßig große Ruhemasse besitzt („kalte“ Dunkle Materie, CDM). Im nächsten Kapitel wird gezeigt, dass unter gewissen Bedingungen das leichteste supersymmetrische Teilchen einen geeigneten Kandidaten für diese Art von Dunkler Materie darstellt.

Aus dem Gesagten folgt, dass Supersymmetrie eine attraktive Ergänzung des Standardmodells zur Beseitigung der verbliebenen Schwierigkeiten darstellt. Im nächsten Kapitel soll der theoretische Rahmen dieser Erweiterung in größerem Detail besprochen werden.



# Kapitel 2

## Supersymmetrie

Das im ersten Kapitel eingeführte Standardmodell der Teilchenphysik soll nun erweitert werden, um möglichst viele der verbliebenen Unzulänglichkeiten aufzulösen. Interessanterweise lassen sich durch die Hinzunahme eines einzigen, weiteren Prinzips alle in dem letzten Abschnitt aufgeworfenen Probleme auf natürliche Art und Weise beseitigen. Man fordert nun zusätzlich, dass die Lagrange-Dichte invariant ist gegenüber einer Transformation, die Fermionen in Bosonen umwandelt und umgekehrt:

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle, \quad Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad (2.1)$$

Diese Symmetrie wird als Supersymmetrie (SUSY) bezeichnet. Die Supersymmetrie hebt also gewissermaßen die im Standardmodell strenge Trennung zwischen den Teilchen, aus welchen sich die Materie zusammensetzt, und solchen, welche Kräfte beschreiben, auf.

In den folgenden Abschnitten sollen die wichtigsten Grundlagen der Theorie vorgestellt werden. Am Anfang steht die Formulierung der freien, supersymmetrischen Lagrange-Dichte aus einer Anzahl sogenannter Supermultipletts, in denen die Teilchen und ihre entsprechenden supersymmetrischen Partnerteilchen zusammengefasst sind. Diese wird dann um Wechselwirkungen zunächst zwischen den Konstituenten der Supermultipletts und später um Eichwechselwirkungen ergänzt. Auf diese Weise erhält man die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells (MSSM). Zum Ende des Kapitels soll weiterhin auf R-Paritäts-Erhaltung und Brechung von Supersymmetrie eingegangen werden. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [7] und [32].

### 2.1 Theorie ohne Wechselwirkungen

Ausgehend von einer Lagrange-Dichte der Form

$$\mathcal{L}_{\text{Boson}} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi \quad (2.2)$$

wird die freie Klein-Gordon-Bewegungsgleichung erhalten, welche masselose, geladene Bosonen mit Spin 0 durch ein skalares, komplexwertiges Feld  $\phi$  bzw.  $\phi^*$  beschreibt. Entsprechend führt

$$\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \quad (2.3)$$

auf die Weyl-Gleichung für linkschirale masselose Spinorfelder  $\chi$  und  $\chi^\dagger$  mit Spin 1/2, also Fermionen. Die Lagrange-Dichte, bestehend aus einem freien masselosen bosonischen Feld und einem freien masselosen fermionischen Feld, lässt sich daher schreiben als

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{Fermion}} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi. \quad (2.4)$$

Diese Lagrange-Dichte wird in diesem Zusammenhang auch freies Wess-Zumino-Modell genannt. Gesucht sind nun die infinitesimalen Transformationen von der Form

$$U = 1 + i\xi Q, \quad (2.5)$$

die Bosonen in Fermionen überführen und umgekehrt und dabei die Bewegungsgleichungen invariant lassen.  $Q$  ist hierbei der Generator der Transformation und wie  $\xi$  ein linkschiraler  $\chi$ -artiger Spinor. Es gilt

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

mit infinitesimalen Einträgen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  und  $\xi Q$  bezeichnet das Lorentz-invariante Skalarprodukt

$$\xi Q = \xi_a Q^a = \xi^T (-i\sigma_2) Q. \quad (2.7)$$

Man findet für die bosonischen Felder

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow (1 + \delta_\xi)\phi \\ \phi^* &\rightarrow (1 + \delta_\xi)\phi^* \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_\xi \phi &= \xi \chi \\ \delta_\xi \phi^* &= \chi^\dagger \xi^* \end{aligned}$$

und analog für die fermionischen Felder

$$\begin{aligned} \chi &\rightarrow (1 + \delta_\xi)\chi \\ \chi^\dagger &\rightarrow (1 + \delta_\xi)\chi^\dagger \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_\xi \chi &= -i\sigma^\mu i\sigma_2 \xi^* \partial_\mu \phi \\ \delta_\xi \chi^\dagger &= -\partial_\mu \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu. \end{aligned}$$

Die Lagrange-Dichte wird unter dieser Transformation zu

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta_\xi \mathcal{L}, \quad (2.8)$$

wobei

$$\delta_\xi \mathcal{L} = \partial_\mu \left[ \chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi + \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right] \quad (2.9)$$

ist. Die transformierte Lagrange-Dichte unterscheidet sich also lediglich um eine totale Ableitung. Die zugehörige Wirkung bzw. die Bewegungsgleichungen bleiben damit unter SUSY-Transformationen unverändert. Das Paar  $(\phi, \chi)$  wird jetzt auch als chirales Supermultiplett bezeichnet. Aus technischen Gründen muss ein zusätzliches komplexwertiges Hilfsfeld  $F$  verlangt werden, welches die Lagrange-Dichte um den Term

$$\mathcal{L}_{\text{Hilfsfeld}} = F^* F \quad (2.10)$$

erweitert. Die zugehörigen infinitesimalen SUSY-Transformationen lauten:

$$\begin{aligned}\delta_\xi F &= -i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \\ \delta_\xi F^* &= i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi.\end{aligned}$$

Die Generatoren  $Q$  und  $Q^*$  der Supersymmetrie erfüllen weiterhin die folgenden Antikommutatorrelationen

$$\{Q_a, Q_b\} = 0 \quad \text{und} \quad \{Q_a^*, Q_b^*\} = 0 \quad (2.11)$$

und die Superalgebra

$$\{Q_a, Q_b^\dagger\} = (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu. \quad (2.12)$$

## 2.2 Das Wess-Zumino-Modell

Das freie sogenannte Wess-Zumino-Modell

$$\mathcal{L}_{\text{WZ, frei}} = \partial_\mu \phi_i^* \partial^\mu \phi_i + \chi_i^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i + F_i^* F_i, \quad (2.13)$$

bestehend aus einer bestimmten Anzahl Supermultipletts mit dem Index  $i$ , soll nun um Wechselwirkungen erweitert werden. Der allgemeinste Satz renormierbarer Wechselwirkungsterme, die invariant unter den SUSY-Transformationen aus Abschnitt 2.1 sind, muss von der Form

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} = W_i(\phi, \phi^\dagger) F_i - \frac{1}{2} W_{ij}(\phi, \phi^\dagger) \chi_i \cdot \chi_j + \text{h.c.} \quad (2.14)$$

sein, wobei hier über  $i$  und  $j$  summiert wird. Es zeigt sich, dass  $W_i$  von der Form

$$W_i = M_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} y_{ijk} \phi_j \phi_k \quad (2.15)$$

und  $W_{ij}$  von der Form

$$W_{ij} = M_{ij} + y_{ijk} \phi_k \quad (2.16)$$

sein muss. Man schreibt für gewöhnlich

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \quad (2.17)$$

und

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \quad (2.18)$$

mit

$$W = \frac{1}{2} M_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k. \quad (2.19)$$

Weiterhin gilt  $F_i = -W_i^\dagger$  und  $F_i^\dagger = -W_i$ . Insgesamt lässt sich nun das vollständige Wess-Zumino-Modell mit Wechselwirkungen schreiben als:

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}} = \mathcal{L}_{\text{WZ, frei}} + |W_i|^2 - \frac{1}{2} \{W_{ij}\chi_i \cdot \chi_j + \text{h.c.}\} \quad (2.20)$$

oder etwas ausführlicher als

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + F_i^\dagger F_i - |M\phi + y\phi^2|^2 + \frac{1}{2} \{(M + y\phi)\chi \cdot \chi + \text{h.c.}\}. \quad (2.21)$$

Die einzelnen Terme des Wess-Zumino-Modells mit Wechselwirkungen können nun nach Potenzen in den Feldern geordnet werden. Ausgeschrieben lauten die quadratischen Anteile in  $\phi$  und  $\chi$  für ein Supermultiplett:

$$\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + M^2 \phi^\dagger \phi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \frac{1}{2} M \chi^T (-i\sigma_2) \chi - \frac{1}{2} M^* \chi^\dagger i\sigma_2 \chi^{\dagger T}. \quad (2.22)$$

Man identifiziert die kinematischen Terme, die bereits aus der wechselwirkungsfreien Theorie bekannt sind. Interessant sind die hinzukommenden Massenterme, welche sowohl auf die freie Klein-Gordon-Gleichung für massebehaftete Bosonen, als auch auf eine Gleichung führen, welche massive linkschirale Fermionen beschreibt. Die zugehörigen Feynman-Diagramme sind in Abbildung 2.1(a) zu sehen. Offensichtlich besitzen die einzelnen Komponenten der Supermultipletts in diesem Modell die gleiche Masse  $M$ . Die Tatsache, dass supersymmetrische Partnerteilchen nicht bei den gleichen Massen wie die bereits bekannten Teilchen des Standardmodells beobachtet werden, lässt darauf schließen, dass Supersymmetrie auf einer Energieskala von mindestens  $\sim 1$  TeV gebrochen sein muss.

Weiterhin enthält die Wess-Zumino-Lagrange-Dichte noch „echte“ Wechselwirkungsterme, die sich aufteilen lassen in

- Terme, die kubisch in den  $\phi$  sind (siehe Abbildung 2.1(b)):

$$-\frac{1}{2} (M y^* \phi \phi^{\dagger 2} + M^* y \phi^2 \phi^\dagger), \quad (2.23)$$

- einen Term, der quartisch in den  $\phi$  ist (siehe Abbildung 2.1(c)):

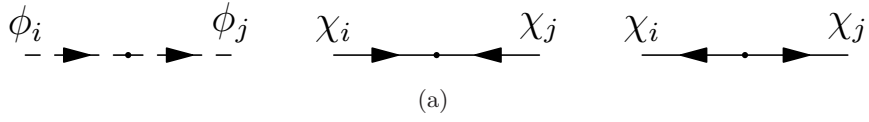
$$-\frac{1}{4} |y|^2 \phi^2 \phi^{*2}, \quad (2.24)$$

- Yukawa-Kopplungsterme zwischen den  $\phi$  und den  $\chi$  (siehe Abbildung 2.1(d)):

$$-\frac{1}{2} \{y\phi\chi \cdot \chi + \text{h.c.}\}. \quad (2.25)$$

Bemerkenswerterweise taucht derselbe Kopplungsparameter  $y$  in allen Wechselwirkungen auf. Dies führt gerade zu der in Abschnitt 1.5 geforderten gegenseitigen Aufhebung von bosonischen und fermionischen Korrekturtermen auf die Masse des Higgs-Teilches zur Vermeidung des Hierarchieproblems.

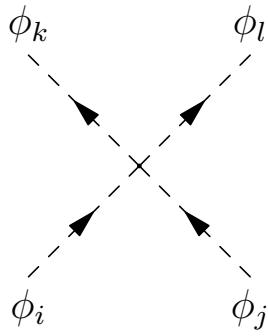
Bevor nun die Kombination der Wess-Zumino-Wechselwirkungen mit den Eichwechselwirkungen erfolgt, soll im nächsten Abschnitt kurz der sogenannte Superfeldformalismus vorgestellt werden, welcher es ermöglicht, die Supermultipletts mit all ihren zahlreichen Kopplungen kompakt zu notieren. Von diesem wird insbesondere bei der Formulierung des MSSM Gebrauch gemacht.



(a)



(b)



(c)



(d)

**Abbildung 2.1:** Wechselwirkungsterme des Wess-Zumino-Modells. (a) Massenterme. (b) kubische Terme. (c) quartischer Term (d) Yukawa-Wechselwirkungen

## 2.3 Superfelder

Eine elegante Art, die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen einer supersymmetrischen Theorie zu notieren, ist mit Hilfe der sogenannten Superfelder möglich. Ein Superfeld besteht aus den Komponentefeldern  $\phi$ ,  $\chi$  und  $F$  und besitzt neben den gewohnten Raumzeitfreiheitsgraden  $x^\mu$  auch Spinorfreiheitsgrade  $\theta$ . Der so erweiterte Raum wird auch Superraum genannt. Das Superfeld  $\Phi$  lässt sich in den Spinorfreiheitsgraden entwickeln zu

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x) + \theta \cdot \chi(x) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x). \quad (2.26)$$

Die infinitesimalen SUSY-Transformationen auf dem Superfeld

$$\delta\Phi = (-i\xi Q - i\bar{\xi}\bar{Q})\Phi = (-i\xi^a Q_a - i\xi^{*a} Q_a^\dagger)\Phi \quad (2.27)$$

mit  $\bar{\xi} = x$  und der differenziellen Darstellung

$$Q_a = i \frac{\partial}{\partial \theta^a} \quad (2.28)$$

und

$$Q_a^\dagger = -i \frac{\partial}{\partial \theta^{*a}} + \theta^b (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \quad (2.29)$$

führen auf dieselben infinitesimalen Transformationen wie in Abschnitt 2.1 für die Komponentfelder. Wechselwirkungen werden nun über Produkte von Superfeldern eingeführt. Die F-Komponente des Ausdrucks

$$W = \frac{1}{2} M_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{6} y_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \quad (2.30)$$

wird auch als Superpotenzial bezeichnet und beinhaltet alle Nicht-Eichwechselwirkungen zwischen den Komponenten der Supermultipletts.

## 2.4 Eichwechselwirkungen

Die Lagrange-Dichte für ein Eichsupermultiplett ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha} + i\lambda^{\alpha\dagger} \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu \lambda)^\alpha + \frac{1}{2} D^\alpha D_\alpha \quad (2.31)$$

und besteht aus einem Eichfeld, beschrieben durch den Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu W_\nu^\alpha - \partial_\nu W_\mu^\alpha - g^{\alpha\beta\gamma} W_\mu^\beta W_\nu^\gamma, \quad (2.32)$$

welcher im allgemeinen Fall eine nicht-abelsche Eichwechselwirkung vermittelt, dem assoziierten supersymmetrischen Partnerfeld  $\lambda$  und dem Hilfsfeld  $D$ . Die Anzahl der Komponenten des Eichfeldes, indiziert durch die griechischen Buchstaben  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , hängt von der jeweiligen Eichgruppe ab und ist im Falle abelscher Eichgruppen gleich null. Wie gewöhnlich lässt sich die Invarianz der



Lagrange-Dichte unter Eichtransformationen durch die Ersetzung der partiellen Ableitung durch eine entsprechende kovariante Ableitung herstellen:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \quad (2.33)$$

Mögliche zusätzliche Wechselwirkungen zwischen Eichfeldern und den Komponenten der Materie-supermultipletts sind

$$\mathcal{L}_{\text{Eich, Materie}} = -\sqrt{2}g[(\phi_i^\dagger T^\alpha \chi_i)\lambda^\alpha + \lambda^{\alpha\dagger}(\chi_i^\alpha T^\alpha \phi_i)] - g(\phi_i^\dagger T^\alpha \phi_i)D^\alpha, \quad (2.34)$$

wobei die  $T^\alpha$  die Generatoren der jeweiligen Eichgruppe sind. Die SUSY-Transformationen für die Felder des Eichsupermultipletts lauten schließlich

$$\begin{aligned} \delta_\xi W^{\mu\alpha} &= \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda^\alpha + \lambda^{\alpha\dagger} \bar{\sigma}^\mu \xi \\ \delta_\xi \lambda^\alpha &= \frac{1}{2} i \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi F_{\mu\nu}^\alpha + \xi D^\alpha \\ \delta_\xi D^\alpha &= -i(\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^\alpha - (D_\mu \lambda)^{\alpha\dagger} \bar{\sigma}^\mu \xi). \end{aligned}$$

Damit sind alle potenziellen Wechselwirkungen innerhalb einer supersymmetrischen Theorie aufgezeigt. Im nächsten Abschnitt werden all diese Terme zusammen mit dem physikalischen Teilcheninhalt zur minimalen supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells vereinigt.

## 2.5 Das MSSM

Die gesamte supersymmetrische Lagrange-Dichte ergibt sich nun zu

$$\mathcal{L}_{\text{ges}} = \mathcal{L}_{\text{WZ}}(\partial_\mu \rightarrow D_\mu) + \mathcal{L}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_{\text{Eich, Materie}}, \quad (2.35)$$

wobei im Wess-Zumino-Modell alle partiellen Ableitungen durch die kovarianten Ableitungen ersetzt werden:

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}}(\partial_\mu \rightarrow D_\mu) = D_\mu \phi_i^* D^\mu \phi_i + \chi_i^\dagger i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi_i + F_i^\dagger F_i + |W_i|^2 - \frac{1}{2} \{W_{ij} \chi_i \cdot \chi_j + \text{h.c.}\}, \quad (2.36)$$

$\mathcal{L}_{\text{Eich}}$  und  $\mathcal{L}_{\text{Eich, Materie}}$  entsprechen den Gleichungen 2.31 bzw. 2.34 aus Abschnitt 2.4. Alle Wechselwirkungen der Eichfelder mit den Komponenten der Supermultipletts ergeben sich als Summe über alle Gruppen  $G$ , Eichfelder  $\alpha$  und Supermultipletts  $i$  bzw.  $j$  zu

$$\frac{1}{2} \sum_G \sum_\alpha \sum_{i,j} g_G^2 (\phi_i^\dagger T_G^\alpha \phi_i) (\phi_j^\dagger T_G^\alpha \phi_j). \quad (2.37)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Kopplungskonstanten  $g_G$  und die Generatoren  $T_G^\alpha$  natürlich von der betrachteten Gruppe abhängen.

Bisher wurden nur linkschirale Felder für die Fermionen betrachtet. Die rechtschiralen Felder lassen sich aber durch das ladungskonjugierte linkschirale Feld des jeweiligen Antifermions ausdrücken, wie hier am Beispiel des Elektrons gezeigt:

$$e_R^- \equiv \psi_{e^-} = (e_L^+)^C \equiv i\sigma_2 \chi^* \quad (2.38)$$

Der vollständige Teilcheninhalt ist in Superfeldnotation in Tabelle 2.1 angegeben. Das MSSM ist nun definiert durch die Wahl des bestimmten Superpotenzials

$$W = y_u^{ij} \bar{u}_i Q_j \cdot H_u - y_d^{ij} \bar{d}_i Q_j \cdot H_d - y_e^{ij} \bar{e}_i L_j \cdot H_d + \mu H_u \cdot H_d, \quad (2.39)$$

wobei der Higgs-Massenparameter  $\mu$  der einzige durch die Erweiterung neu hinzukommende freie Parameter des Modells ist.

Wie bereits im Standardmodell gesehen, mischen Teilchen mit denselben Quantenzahlen zu den physikalischen Masseneigenzuständen. So ergeben Linearkombinationen aus den geladenen Winos  $\tilde{W}^\pm$  und Higgsinos  $\tilde{H}^\pm$  die sogenannten Charginos  $\tilde{\chi}_i^\pm$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1^\pm \\ \tilde{\chi}_2^\pm \end{pmatrix} = \mathbf{C}^\pm \begin{pmatrix} \tilde{W}^\pm \\ \tilde{H}^\pm \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

mit den Mischungsmatrizen  $\mathbf{C}^\pm$ , in deren Basis dann die Chargino-Massenmatrix

$$\begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}m_W \sin \beta \\ \sqrt{2}m_W \cos \beta & \mu \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

diagonal ist. Entsprechend mischen die ungeladenen Higgsinos  $\tilde{H}_{u,d}^0$ , das Wino  $\tilde{W}^0$  sowie das Bino  $\tilde{B}$  über  $\mathbf{N}$  zu den Neutralinos  $\tilde{\chi}_i^0$  via

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1^0 \\ \tilde{\chi}_2^0 \\ \tilde{\chi}_3^0 \\ \tilde{\chi}_4^0 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{W}^0 \\ \tilde{H}_u^0 \\ \tilde{H}_d^0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

welche die Eigenzustände der Neutralino-Massenmatrix

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_Z c_\beta s_{\theta_W} & m_Z s_\beta s_{\theta_W} \\ 0 & M_2 & m_Z c_\beta c_{\theta_W} & -m_Z s_\beta c_{\theta_W} \\ -m_Z c_\beta s_{\theta_W} & m_Z c_\beta c_{\theta_W} & 0 & -\mu \\ m_Z s_\beta s_{\theta_W} & -m_Z s_\beta c_{\theta_W} & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

sind, mit den Abkürzungen  $c_{\theta_W} = \cos \theta_W$ ,  $s_{\theta_W} = \sin \theta_W$ ,  $c_\beta = \cos \beta$  und  $s_\beta = \sin \beta$ .

Ferner mischen die Sfermionen der dritten Generation zu

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{f}} & \sin \theta_{\tilde{f}} \\ -\sin \theta_{\tilde{f}} & \cos \theta_{\tilde{f}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

mit dem Sfermion-Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{f}}$ . Für die ersten beiden Generationen ist die Mischung vernachlässigbar.

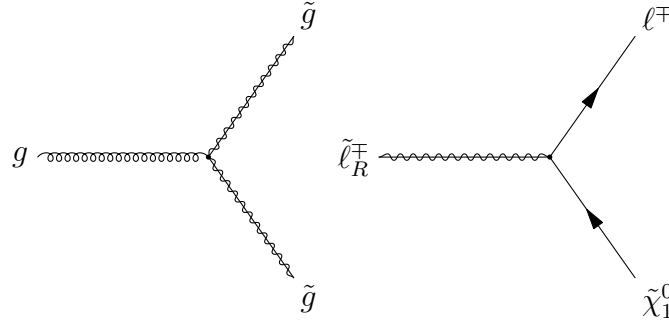
## 2.6 R-Parität

Die supersymmetrische Lagrange-Dichte des MSSM lässt sich durch weitere renormierbare, eichinvariante Terme von der Form

$$W_{\Delta L=1} = \lambda_e^{ijk} L_i L_j \bar{e}_k + \lambda_L^{ijk} L_i Q_j \bar{d}_k + \mu_L^i L_i H_u \quad (2.45)$$

Teilcheninhalt des MSSM						
Teilchenname	Abkürzung		Masseneigenzustände	$U(1)_Y$	$SU(2)_L$	$SU(3)_C$
Squarks						
Sup, Sdown	$Q$	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	-	1/3	<b>2</b>	<b>3</b>
	$\bar{u}$	$\tilde{u}_R$		-4/3	<b>1</b>	<b>3</b>
	$\bar{d}$	$\tilde{d}_R$		2/3	<b>1</b>	<b>3</b>
Scharm, Sstrange	$Q$	$(\tilde{c}_L, \tilde{s}_L)$	-	1/3	<b>2</b>	<b>3</b>
	$\bar{c}$	$\tilde{c}_R$		-4/3	<b>1</b>	<b>3</b>
	$\bar{s}$	$\tilde{s}_R$		2/3	<b>1</b>	<b>3</b>
Stop, Sbottom	$Q$	$(\tilde{t}_L, \tilde{b}_L)$	$\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2$	1/3	<b>2</b>	<b>3</b>
	$\bar{t}$	$\tilde{t}_R$		-4/3	<b>1</b>	<b>3</b>
	$\bar{b}$	$\tilde{b}_R$		2/3	<b>1</b>	<b>3</b>
Leptonen						
Sneutrino, Selektion	$L$	$(\tilde{\nu}_{eL}, \tilde{e}_L)$	-	-1	<b>2</b>	<b>1</b>
	$\bar{e}$	$\tilde{e}_R$		2	<b>1</b>	<b>1</b>
Sneutrino, Smyon	$L$	$(\tilde{\nu}_{\mu L}, \tilde{\mu}_L)$	-	-1	<b>2</b>	<b>1</b>
	$\bar{\mu}$	$\tilde{\mu}_R$		2	<b>1</b>	<b>1</b>
Sneutrino, Stau	$L$	$(\tilde{\nu}_{\tau L}, \tilde{\tau}_L)$	$\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$	-1	<b>2</b>	<b>1</b>
	$\bar{\tau}$	$\tilde{\tau}_R$		2	<b>1</b>	<b>1</b>
Higgsinos, Gauginos						
Higgsino	$H_u$	$(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$	$\tilde{\chi}_1^\pm, \tilde{\chi}_2^\pm, \tilde{\chi}_1^0, \tilde{\chi}_2^0, \tilde{\chi}_3^0, \tilde{\chi}_4^0$	1	<b>2</b>	<b>1</b>
	$H_d$	$(\tilde{H}_u^0, \tilde{H}_u^-)$		-1	<b>2</b>	<b>1</b>
Wino	$W^\pm, W^0$	0		<b>3</b>	<b>1</b>	
Bino	$\tilde{B}^0$	0		<b>1</b>	<b>1</b>	
Gluino	$\tilde{g}$	0		<b>1</b>	<b>8</b>	

**Tabelle 2.1:** Teilcheninhalt des MSSM: Dargestellt sind alle supersymmetrischen Teilchen, die dem Standardmodell hinzugefügt werden müssen, zusammen mit ihrer Multipllettstruktur unter den Eichtransformationen. Die Bezeichnungen der durch Mischung entstandenen Massenzustände sind in einer eigenen Spalte angegeben.



**Abbildung 2.2:** Unter der Voraussetzung, dass R-Parität multiplikativ erhalten ist, kommen nur Vertices mit einer geraden Anzahl an supersymmetrischen Teilchen (mit  $R = -1$ ) vor. Als Beispiel ist im linken Bild die Paar-Produktion von Gluinos  $\tilde{g}$  gezeigt und im rechten Bild ist der Zerfall eines Sleptons  $\tilde{\ell}_R^\mp$  in das leichteste supersymmetrische Teilchen, in diesem Fall ein  $\tilde{\chi}_1^0$ , zu sehen.

und

$$W_{\Delta B=1} = \lambda_B^{ijk} \bar{u}_i \bar{d}_j \bar{d}_k \quad (2.46)$$

ergänzen, wobei (2.45) die Leptonenzahl  $L$  und (2.46) die Baryonenzahl  $B$  um 1 verletzt. Da die Wahrscheinlichkeit für solche Prozesse jedoch insbesondere durch die Messung der unteren Grenze der Lebensdauer des Protons unnatürlich stark begrenzt ist, müssen diese im MSSM (im Gegensatz zum Standardmodell, wo derartige Terme nicht auftauchen) durch einen geeigneten Mechanismus unterdrückt werden. Die einfachste Möglichkeit besteht hier in der Einführung zusätzlicher Erhaltungsgrößen. Da man davon ausgeht, dass die Baryonenzahl und die Leptonenzahl jeweils durch nicht-störungstheoretische elektroschwache Prozesse verletzt sind (siehe z. B. [42]), fordert man vielmehr die multiplikative Erhaltung der kombinierten Größe

$$R = (-1)^{3B+L+2S}, \quad (2.47)$$

mit der Spinquantenzahl  $S$ , der sogenannten R-Parität, die jedem Standardmodell-Teilchen die Zahl  $+1$  und jedem supersymmetrischen Teilchen die Zahl  $-1$  zuordnet. Dies hat zum Einen zur Folge, dass supersymmetrische Teilchen stets paarweise erzeugt werden und zum Anderen das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP: lightest supersymmetric particle) stabil und damit (falls elektrisch neutral) ein Kandidat für kalte Dunkle Materie ist (siehe Abbildung 2.2).

## 2.7 SUSY-Brechung

Da bisher noch keine supersymmetrischen Teilchen experimentell nachgewiesen wurden, müssen diese, sollten sie überhaupt existieren, wesentlich schwerer als ihre Partner aus dem Standardmodell sein. Supersymmetrie ist daher im heute und in naher Zukunft experimentell zugänglichen Energiebereich nicht exakt, man sagt auch, sie sei gebrochen. Ohne einen konkreten verantwortlichen Mechanismus vorauszusetzen, kann die Brechung allgemein durch Hinzufügen expliziter, sogenannter „softer“ Terme parametrisiert werden, welche keine neuen Divergenzen in die Theorie einführen dürfen und deren Massendimension daher zwingend positiv ist. Die zulässigen symmetriebrechenden Terme der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{Soft}}$  lauten im Einzelnen:

- Gaugino-Massenterme

$$-\frac{1}{2} \left( M_3 \tilde{g}^\alpha \tilde{g}^\alpha + M_2 \tilde{W}^\beta \tilde{W}^\beta + M_1 \tilde{B} \tilde{B} + \text{h.c.} \right) \quad (2.48)$$

- quadratische Squark-Massenterme

$$-m_{\tilde{Q}_{ij}}^2 \tilde{Q}_i^\dagger \tilde{Q}_j - m_{\tilde{u}_{ij}}^2 \tilde{u}_i^\dagger \tilde{u}_j - m_{\tilde{d}_{ij}}^2 \tilde{d}_i^\dagger \tilde{d}_j \quad (2.49)$$

- quadratische Slepton-Massenterme

$$-m_{\tilde{L}_{ij}}^2 \tilde{L}_i^\dagger \tilde{L}_j - m_{\tilde{e}_{ij}}^2 \tilde{e}_i^\dagger \tilde{e}_j \quad (2.50)$$

- quadratische Higgs-Massenterme

$$-m_{H_u}^2 H_u^\dagger H_u - m_{H_d}^2 H_d^\dagger H_d - (b H_u H_d + \text{h.c.}) \quad (2.51)$$

mit

$$H_u^\dagger H_u = |H_u^+|^2 + |H_u^0|^2 \quad (2.52)$$

und

$$H_u H_d = H_u^+ H_d^- H_u^0 H_d^0 \quad (2.53)$$

- trilineare skalare Kopplungen

$$-a_u^{ij} \tilde{u}_i \tilde{Q}_j H_u + a_d^{ij} \tilde{d}_i \tilde{Q}_j H_d + a_e^{ij} \tilde{e}_i \tilde{L}_j H_d + \text{h.c.} \quad (2.54)$$

Insgesamt enthalten diese komplexwertigen Terme 105 freie Parameter, die denen des Standardmodells hinzugefügt werden müssen. Dies ist im höchsten Maße unbefriedigend und widerspricht zunächst dem angestrebten Ziel der Vereinfachung durch das umfassendere Modell. Allerdings ist der Bereich der möglichen Werte, den die neuen Parameter annehmen können insbesondere durch Messungen zu Raten von Flavour-ändernden neutralen Strömen (FCNCs, Flavour Changing Neutral Currents) und zu CP-verletzenden Prozessen stark eingeschränkt. Aus diesem Grund ist davon auszugehen, dass es sich bei dem derart parametrisierten MSSM um ein bei niedrigen Energien effektives Modell einer noch fundamentaleren Theorie handelt, welche auf einer sehr hohen Energieskala (z. B. der Planck-Skala) gültig ist. Eine solche Theorie ist dann durch eine geringe Zahl von Parametern vollständig beschrieben und der Übergang zu der effektiven Näherung durch einen bestimmten Brechungsmechanismus geregelt.

Ein mögliches umfassendes Modell ist die minimale Supergravitation (mSUGRA): die Massen der Gluinos, der  $W$ -Bosonen und des  $B$ -Bosons sind hier auf der Planck-Skala zu der universellen Gaugino-Masse  $M_{1/2}$  vereinheitlicht

$$-\frac{1}{2} M_{1/2} \left( \tilde{g}^\alpha \tilde{g}^\alpha + \tilde{W}^\beta \tilde{W}^\beta + \tilde{B} \tilde{B} + \text{h.c.} \right), \quad (2.55)$$

die quadratischen Massenmatrizen nehmen im Generationenraum Diagonalform an mit der universellen skalaren Masse  $M_0$

$$\mathbf{m}_{\tilde{Q}}^2 = \mathbf{m}_{\tilde{u}}^2 = \mathbf{m}_{\tilde{d}}^2 = \mathbf{m}_{\tilde{L}}^2 = \mathbf{m}_{\tilde{e}}^2 = M_0^2 \mathbf{1} \quad (2.56)$$

und

$$m_{H_u^2} = m_{H_d^2} = M_0^2. \quad (2.57)$$

Die trilinearen Kopplungen können schließlich durch eine universelle trilineare Kopplungskonstante  $A_0$  beschrieben werden

$$\mathbf{a}_u = A_0 \mathbf{y}_u, \quad \mathbf{a}_d = A_0 \mathbf{y}_d, \quad \mathbf{a}_e = A_0 \mathbf{y}_e, \quad (2.58)$$

wobei die  $\mathbf{y}$  die Matrizen aus dem Superpotenzial (2.39) bezeichnen. Weitere freie Parameter in mSUGRA sind das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der beiden Higgs-Doublets

$$\tan \beta = \frac{v_u}{v_d} \quad (2.59)$$

und das Vorzeichen des Higgs-Massenparameters  $\mu$

$$\text{sign} \mu. \quad (2.60)$$

Die Symmetriebrechung wird im Falle von mSUGRA über gravitative Kopplungen an die Konstituenten eines sogenannten „verborgenen“ Sektors vermittelt, welcher sich nur durch indirekte Wechselwirkung mit dem sichtbaren Sektor bemerkbar macht.

# Kapitel 3

## Parameterrekonstruktion mit Fittino

In den Kapiteln 1 und 2 wurde das Standardmodell der Teilchenphysik und seine minimale supersymmetrische Erweiterung erläutert und eine Übersicht seiner freien Parameter gegeben. Insbesondere wurde aufgezeigt, dass die Existenz einer Vielzahl dieser Parameter eng mit der Brechung der Symmetrien des Modells bei dem Übergang von einer hohen zu einer niedrigeren Energieskala zusammenhängt: die Symmetrie ist bei hochenergetischen Prozessen von der Größenordnung  $10^{16}$  GeV, wie sie sich im frühen Universum etwa  $10^{-36}$  Sekunden nach dem Urknall abgespielt haben, manifest, während sie bei den heutzutage (2008) experimentell zugänglichen Energien auf der Teraskala nicht beobachtet wird. So lassen sich beispielsweise die Massen der Quarks und Leptonen als freie Parameter des Standardmodells auf die Brechung der elektroschwachen Symmetrie durch den Higgs-Mechanismus zurückführen; da sich die supersymmetrischen Teilchen in ihren Massen so sehr von ihren Partnerteilchen unterscheiden, muss Supersymmetrie ebenfalls gebrochen sein.

Es existiert eine ganze Reihe von möglichen Ansätzen zur Modellierung der Brechung von Supersymmetrie. Klarheit kann hier die Rekonstruktion der numerischen Werte der freien Parameter schaffen, die allein auf der Grundlage experimenteller Befunde durchgeführt wird. Im Zuge der Inbetriebnahme der nächsten Generation von Teilchenbeschleunigern und Detektorsystemen besteht die begründete Hoffnung, erstmals in der Lage zu sein, die zur Produktion supersymmetrischer Teilchen nötige Energie zu erreichen und deren Eigenschaften präzise zu vermessen. Offensichtlich ist dann demjenigen Modell der Vorzug zu geben, dessen Parameterwerte sich mit allen Beobachtungen am Besten in Übereinstimmung bringen lassen. Die Parameterrekonstruktion wird damit zu einem unverzichtbaren Werkzeug bei der Aufdeckung des für die Brechung von Supersymmetrie verantwortlichen Mechanismus. Der vorliegende Abschnitt soll nun der Frage nachgehen, wie die freien Parameter eines Modells aus einem gegebenen Satz von gemessenen physikalischen Größen erhalten werden können. Eine detaillierte Aufstellung aller in dieser Studie verwendeten Observablen und ihrer Unsicherheiten wie man sie am LHC zu messen erwartet, ist in Kapitel 4 zu finden.

### 3.1 Allgemeine Bemerkungen

Es wurde bereits gesagt, dass die Lagrange-Dichte des MSSM im allgemeinen Fall, d. h. ohne einen konkreten Brechungsmechanismus vorauszusetzen, durch mindestens 105 Variablen zusätzlich zu denen des Standardmodells parametrisiert werden muss. Die große Anzahl lässt bereits erahnen, dass eine simultane Rekonstruktion aller Parameter aus den Daten nicht möglich ist. Allerdings stellt sich heraus, dass die Werte eines Großteils der Parameter durch bisherige Messungen sehr stark eingeschränkt sind und somit in einer ersten Näherung fixiert werden können. So verschwinden alle komplexen Phasen in den Massematrizen, Mischungen zwischen den Generationen und Mischungen innerhalb der ersten beiden Generationen kommen nicht vor. In diesem Fall verbleiben lediglich

24 Parameter; die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodels wird dann als MSSM-24 bezeichnet.

Dass die gleichzeitige Rekonstruktion dieser Parameterzahl schwierig, aber unter bestimmten günstigen Umständen (im Wesentlichen unter Ausnutzung von Synergien der kombinierten Messungen von LHC und ILC) im Bereich des Machbaren liegt, zeigt eine vorausgegangene Studie [14], deren Ergebnisse in Abschnitt 3.5 kurz zusammengefasst sind. Der Lohn dieser Anstrengungen ist die maximale Unabhängigkeit von Voraussetzungen an das Modell. Die Extrapolation zu hohen Energieskalen geschieht dann in einem sogenannten „Bottom-Up-Approach“.

Eine weitere deutliche Reduzierung der Parameterzahl erhält man durch Vereinheitlichungseffekte, indem man von einem Modell ausgeht, welches auf einer entsprechend hohen Energieskala definiert ist. Bei diesem Ansatz, welcher auch in dieser Arbeit verfolgt wird, muss explizit ein bestimmter Brechungsmechanismus angenommen werden. Für dieses spezielle Modell ist dann zu überprüfen, ob es sich nach erfolgter Rekonstruktion im direkten Vergleich mit konkurrierenden Hypothesen durchzusetzen vermag. Das Hauptaugenmerk wird hierbei auf mSUGRA liegen, welches durch gerade einmal vier kontinuierliche Parameter und einem Vorzeichen vollständig bestimmt ist:

- $M_0$ , der universellen skalaren Masse
- $M_{1/2}$ , der universellen Gauginomasse
- $A_0$ , der universellen trilinearen Kopplungskonstante
- $\tan\beta$ , dem Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der beiden Higgs-Bosonen
- $\text{sign}\mu$ , dem Vorzeichen des Higgs-Massenparameters  $\mu$

Spätestens an dieser Stelle wird offenbar, dass die tatsächlich im Experiment gemessenen Größen (Teilchenmassen, Wirkungsquerschnitte, Verzweigungsverhältnisse usw.) nicht zwangsläufig mit den zu bestimmenden Parametern der Theorie übereinstimmen. Zentrale Aufgabe der Rekonstruktion ist es daher, eine Abbildung aus der Menge der Observablen  $O_i$  in die Menge der Parameter  $P_j$  herzustellen:

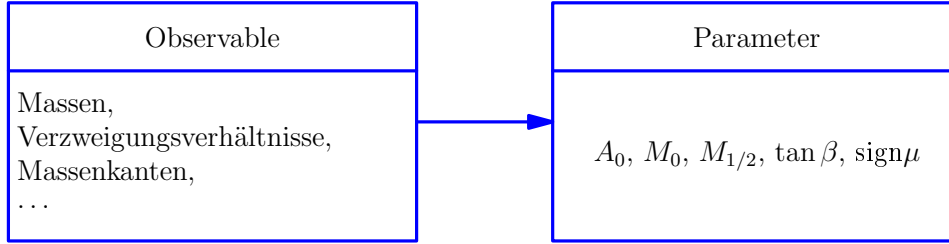
$$\text{Parameter } P_j = f(\text{Observablen } O_i). \quad (3.1)$$

Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.1 schematisch für mSUGRA dargestellt.

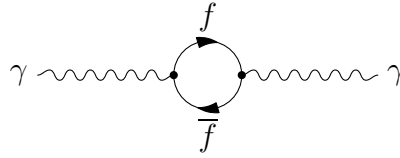
Für ein Modell wie MSSM-24, welches auf derselben Skala gültig ist, auf der die beobachteten Reaktionen ablaufen, können funktionale Zusammenhänge zwischen Parametern und Observablen auf Born-Niveau durch analytische Ausdrücke angegeben werden. Die einzelnen Parameter eines bestimmten Sektors hängen oft nur von wenigen Observablen ab, so dass stets eine ausreichende Anzahl an determinierenden Gleichungen zur Verfügung steht. Zum Beispiel ist der Higgs-Sektor auf Born-Niveau vollständig durch  $\tan\beta$  und der Masse des pseudoskalaren Higgs  $m_A$  bestimmt. Sind die zu rekonstruierenden Parameter hingegen auf einer höheren Energieskala definiert, so muss zusätzlich vereinbart sein, auf welche Weise der Übergang zu der beobachtbaren Skala vonstatten geht. Dies wird von den sogenannten Renormierungsgruppengleichungen geleistet, welche aber in erster Ordnung der Störungstheorie ebenfalls geschlossene Lösungen besitzen, die die gewünschte energieabhängige Entwicklung z. B. der Kopplungskonstanten oder der Teilchenmassen beschreiben.

Nun wird aber gleichermaßen gefordert, den gerade umgekehrten Weg beschreiten zu können, d. h. aus einem gegebenen Satz von Parametern die Werte für alle denkbaren Observablen wie Teilchenmassen, Massenkanten, Wirkungsquerschnitte, Verzweigungsverhältnisse, Asymmetrien usw.





**Abbildung 3.1:** Schematische Darstellung der Parameterrekonstruktion. Die zu rekonstruierenden Parameter stimmen i. A. nicht mit den experimentell zugänglichen Observablen überein. Ziel der Rekonstruktion ist es daher, eine Abbildung von dem Vektor der Observablen auf die freien Parameter des Modells herzustellen.



**Abbildung 3.2:** Vakuumpolarisation des Propagatorterms eines Eichbosons, hier eines Photons  $\gamma$ , als Beispiel für einen Prozess höherer Ordnung. Zur Berechnung dieser Schleifenkorrektur liefern alle elektrisch geladenen Fermionen  $f$  der Theorie einen Beitrag in den insbesondere auch ihre Masse eingeht. Eine Observable wie ein Wirkungsquerschnitt, zu deren Bestimmung ein solches Diagramm berechnet werden muss, hängt also zusätzlich von einer großen Anzahl von freien Parametern des Modells ab.

abzuleiten. Dies führt jedoch zu Inkonsistenzen, falls der Fehler der Born-Approximation auf die berechneten Observablen  $\frac{\Delta O_i}{O_i}$  größer ist als die entsprechenden Unsicherheiten durch Präzisionsmessungen insbesondere an einem zukünftigen Linearbeschleuniger wie dem ILC. Um hier eine hinreichend genaue Vorhersage durch die Theorie zu gewährleisten, müssen Schleifenkorrekturen in der höchsten verfügbaren Ordnung berücksichtigt werden, so dass gilt:

$$\frac{\Delta O_i^{\text{Theorie}}}{O_i} < \frac{\Delta O_i^{\text{Messung}}}{O_i}. \quad (3.2)$$

Als Beispiel für einen solchen Prozess höherer Ordnung sei die Vakuumpolarisation durch ein propagierendes Eichboson genannt (siehe Abbildung 3.2). Das gezeigte Photon materialisiert sich spontan in ein Fermion-Antifermion-Paar, welches seinerseits nach einer gewissen Zeit wieder zu einem Photon zerstrahlt. Der resultierende Beitrag ergibt sich dann aus der Summe über alle diese für jedes elektrisch geladene Fermion des Modells existierenden Diagramme. Eine Observable wie ein Wirkungsquerschnitt hängt somit praktisch von allen freien Parametern ab:

$$\text{Observable } O_i = f'(\text{alle Parameter } P_j). \quad (3.3)$$

Eine analytisch geschlossene Formel für  $f'$  kann nicht länger angegeben werden. Die grundsätzliche Idee der Rekonstruktion besteht nun darin, die Parameter so lange zu variieren, bis ein Satz

gefunden ist, für den die daraus berechneten Observablen mit allen zum Vergleich angebotenen gemessenen Observablen hinreichend gut übereinstimmen. Diese Anpassung der Parameter an die Observablen wird umgangssprachlich auch als Parameter-„Fit“ bezeichnet. Dieser Aufgabe gerecht zu werden ist das erklärte Ziel von Fittino. Der nächste Abschnitt führt zunächst in die allgemeine Funktionsweise des Programms ein. Im Anschluss werden einige der für die Rekonstruktion relevanten Verfahren und Algorithmen in etwas größerem Detail beleuchtet.

## 3.2 Die Funktionsweise von Fittino

Das in C++ implementierte Software-Paket [15] entstand im Kontext des Supersymmetry-Parameter-Analysis-Projektes (SPA) [1] und wird seither stetig weiterentwickelt. Der Quellcode unterliegt der GNU-General-Public-Lizenz [2] für freie Software (ab Version 2) und ist unter [38] erhältlich. Fittino extrahiert die Parameter der Lagrange-Dichten einer ganzen Reihe von supersymmetrischen Modellen aus den Observablen heutiger und zukünftiger Collider-Experimente in einem globalen Fit. Die von dem Programm unterstützten Theorien sind mSUGRA, GMSB (Gauge-Mediated-Symmetry-Breaking), AMSB (Anomaly-Mediated-Symmetry-Breaking), MSSM und NMSSM (Next-To-MSSM). Um parametrischen Unsicherheiten aufgrund der durch die Messgenauigkeit begrenzt bekannten Standardmodellparameter zu berücksichtigen, können diese den freien SUSY-Parametern hinzugefügt werden. Je nach Komplexität des Problems stehen ausgefeilte Methoden zu dessen Bewältigung bereit. Orientierung bieten dabei die folgenden Grundsätze:

- Sofern es die verwendbaren Messungen zulassen, sollen keine a-priori-Annahmen über die zu rekonstruierenden Parameter vorausgesetzt werden müssen
- Alle Messungen zukünftiger Beschleuniger sollen bei der Rekonstruktion verwendet werden können
- Korrelationen zwischen den Parametern werden als vollwertiger Teil der Rekonstruktion behandelt und wiedergegeben
- Alle verfügbaren Diagrammkorrekturen gehen in die Rekonstruktion ein

Zentrales Bedienelement des Programms ist eine ASCII-Input-Datei, in welcher die Observablen mit ihren zu erwartenden Unsicherheiten sowie die zur Steuerung von Fittino gewünschten Optionen vom Anwender spezifiziert werden. Die Syntax ist flexibel gestaltet, so dass Messfehler aus unterschiedlichen Quellen separat angegeben werden können. Denkbar wäre z. B. eine Trennung von statistischem und systematischem Fehler, was sich als ausgesprochen hilfreich bei der Behandlung von Korrelationen zwischen den einzelnen Fehleranteilen herausstellt (siehe hierzu auch Abschnitt 4.5). Zu den Observablen zählen:

- Teilchenmassen, obere Schranken auf Massen unentdeckter Teilchen
- Zerfallsbreiten
- Wirkungsquerschnitte
- Verzweigungsverhältnisse
- kinematische Kanten in Invariante-Masse-Spektren

- Produkte, Summen und Quotienten von Observablen

Im ersten Schritt der Rekonstruktion werden die Startparameter für den Fit bestimmt. Aus diesen werden dann unter Einbeziehung aller verfügbaren Korrekturen höherer Ordnung die theoretischen Vorhersagen der Observablen berechnet. Zu diesem Zweck kann eine darauf spezialisierte Software wie z. B. Werner Porods SPHENO [41] über die SUSY-Les-Houches-Accord-Schnittstelle (SLHA) [24] in Fittino eingebunden werden. Als ein Maß für den Grad an Übereinstimmung wird der sogenannte  $\chi^2$ -Wert herangezogen, der sich aus der fehlergewichteten Summe der quadratischen Differenzen zwischen den gemessenen und den berechneten Observablen ergibt:

$$\chi^2 = \left( \mathbf{O}^{\text{Messung}} - \mathbf{O}^{\text{Theorie}}(\mathbf{P}) \right)^T \mathbf{V}^{-1} \left( \mathbf{O}^{\text{Messung}} - \mathbf{O}^{\text{Theorie}}(\mathbf{P}) \right), \quad (3.4)$$

wobei  $\mathbf{V}$  die Kovarianzmatrix bezeichnet. Eine große Diskrepanz hat demnach einen hohen  $\chi^2$ -Wert zur Folge. Ist die Abweichung inakzeptabel, werden die Parameter in systematischer Weise variiert, bis die  $\chi^2$ -Funktion ihr (im Idealfall globales) Minimum annimmt. Diese Funktionsoptimierung wird von einem weiteren externen Programm, hier MINUIT [35], übernommen. Derjenige Parametersatz für den die  $\chi^2$ -Funktion stationär wird, reproduziert demnach die Gesamtmenge der Observablen am Besten. An die so rekonstruierten Parameter kann sich eine umfassende Fehleranalyse anschließen.

Es stellt sich jedoch heraus, dass MINUIT Schwierigkeiten hat, das Minimum verlässlich zu finden, wenn die Startparameter weit (d. h. einen großen euklidischen Abstand) von den wahren Parametern entfernt sind. Der Minimierungsprozess kann daher noch durch sogenanntes Simulated Annealing, unterstützt werden. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um eine adaptive Variante des Metropolis-Hastings-Algorithmus [34], welcher zur Klasse der Markov-Ketten-Monte-Carlo-Methoden (MCMC, für Markov-Chain-Monte-Carlo-Method) gehört (mehr hierzu in Abschnitt 3.4.1). Bei der Minimierung in hochdimensionalen Parameterräumen wie bei MSSM-24 können die Startwerte bereits vor dem eigentlichen Fit in einem mehrere Stufen umfassenden Prozess in die Nähe der „wahren“ Werte gebracht werden (siehe auch Abschnitt 3.5).

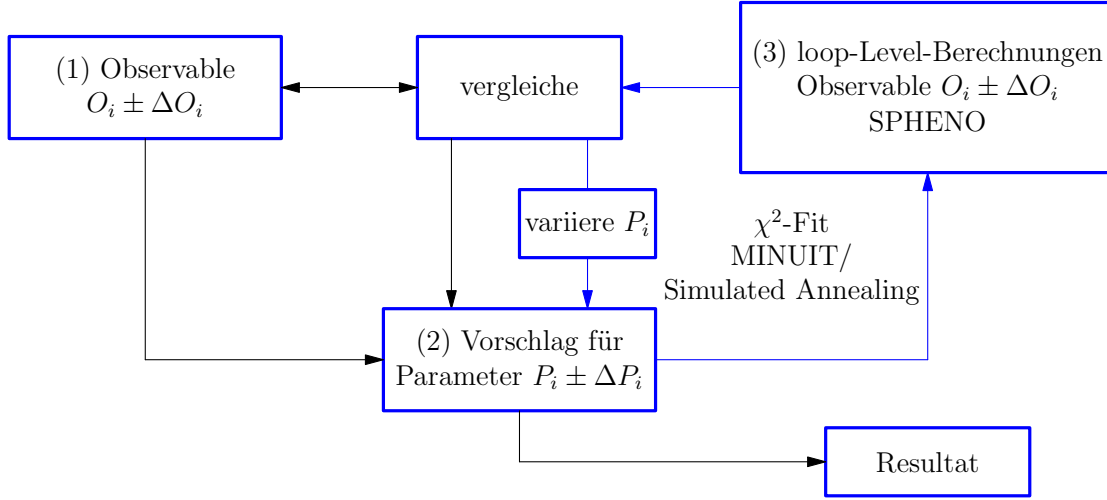
Am Ende des Fits wird im erfolgreichen Fall als Resultat neben den rekonstruierten Theorieparametern die vollständige Korrelationsmatrix erhalten. Der vollständige Ablauf der Parameterrekonstruktion mit Fittino ist in Abbildung 3.3 noch einmal schematisch dargestellt.

### 3.3 Funktionsoptimierung mit MINUIT

Das im vorigen Abschnitt beschriebene Minimierungsproblem wird mit Hilfe der MINUIT-Funktion MINIMIZE gelöst. Im Wesentlichen kommen in MINIMIZE zwei unterschiedliche Algorithmen zur Anwendung, die sich in gewisser Weise komplementär zueinander verhalten, mit der Absicht, die Schwächen des jeweils Anderen so gut wie möglich zu kompensieren. Dies sind ein als MIGRAD implementierter Algorithmus aus der Familie der Variable-Metrik-Methoden und das Stepping-Verfahren SIMPLEX. Weiter unten schließt sich eine kurze Beschreibung der Markov-Ketten-Monte-Carlo-Methoden an, welche eingesetzt werden, um die Parameterrekonstruktion vorzubereiten, zu begleiten oder zu ergänzen.

#### 3.3.1 MIGRAD

Die MIGRAD-Methode basiert auf der Tatsache, dass sich jede hinreichend gutmütige Abbildung, insbesondere also die meisten physikalisch Relevanten, in der Nähe eines ihrer Minima durch eine



**Abbildung 3.3:** Schematische Darstellung der Funktionsweise von Fittino. Das Programm erhält einen Satz von gemessenen oder simulierten Observablen und ihre Unsicherheiten in Form einer Input-Datei (1). Auf dieser Grundlage wiederum wird ein Satz von Parametern als Startwerte für den Fit bestimmt (2). Dies kann z. B. unter Ausnutzung von analytischen Born-Niveau-Beziehungen geschehen. Aus den Parametern wird dann mit Hilfe von SPHENO unter Einbeziehung von Korrekturen höherer Ordnung auf die Observablen zurückgerechnet (3) und mit den Werten aus der Input-Datei verglichen. Eine große Diskrepanz resultiert in einem hohen Wert für  $\chi^2$ : Die Parameter werden variiert und der Prozess beginnt von Neuem bis eine hinreichend große Übereinstimmung erreicht ist (Scheife aus blauen Pfeilen). Die Minimierung der  $\chi^2$ -Funktion übernimmt MINUIT. Das Verfahren kann alternativ durch Simulated Annealing unterstützt werden.

quadratische Funktion approximieren lässt. Eine solche kann um jeden Punkt  $\mathbf{P}_0$  des Definitionsbereichs aus drei Funktionswerten oder alternativ aus einem Funktionswert und den Werten der ersten und zweiten Ableitungen an diesem Punkt konstruiert werden. Allgemein kann jede quadratische Funktion  $\chi^2$  mit den Argumenten  $\mathbf{P}$  geschrieben werden als

$$\chi^2(\mathbf{P}) = \chi^2(\mathbf{P}_0) + \nabla\chi^2(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \quad (3.5)$$

mit dem Gradientenvektor  $\nabla\chi^2$ , dessen Komponenten die ersten partiellen Ableitungen  $\partial\chi^2/\partial P_i$  sind und  $\mathbf{H}^{-1}$  der Hesse-Matrix aus den zweiten partiellen Ableitungen

$$\mathbf{H}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial P_1 \partial P_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial P_i \partial P_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial P_1 \partial P_i} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial P_i \partial P_i} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Falls die Funktion, wie wohl in den meisten Fällen, nicht bekannt sein sollte, so müssen die ersten und zweiten Ableitungen durch endliche Differenzen angenähert werden. Ist die Matrix  $\mathbf{H}$  positiv definit, so ist ein Kandidat für das Funktionsminimum gegeben durch

$$\mathbf{P}_{\min} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{H}\nabla\chi^2. \quad (3.7)$$

Um den Punkt  $\mathbf{P}_{\min}$  wird dann erneut eine quadratische Approximation konstruiert, bis die gesuchte Funktion gefunden ist.

Sollten sich die Startwerte für den Algorithmus bereits in der Nähe des Minimums befinden, so ist anzunehmen, dass Konvergenz in wenigen Schritten erreicht ist. Da die inverse Hesse-Matrix gleichzeitig die Kovarianzmatrix ist, werden Korrelationen zwischen den Parametern in jeder Iteration mitberücksichtigt.

Die Methode ist jedoch relativ rechenintensiv und versagt bei nicht positiv definiten Kovarianzmatrizen. Um diesem Fall zu begegnen, sind eine Reihe von ausgeklügelten Techniken notwendig, aber auch diese führen ebenfalls nicht zwangsläufig zum Erfolg. Im nächsten Abschnitt soll daher das alternative, vergleichsweise einfache, dafür sehr robuste Simplex-Verfahren vorgestellt werden.

### 3.3.2 SIMPLEX

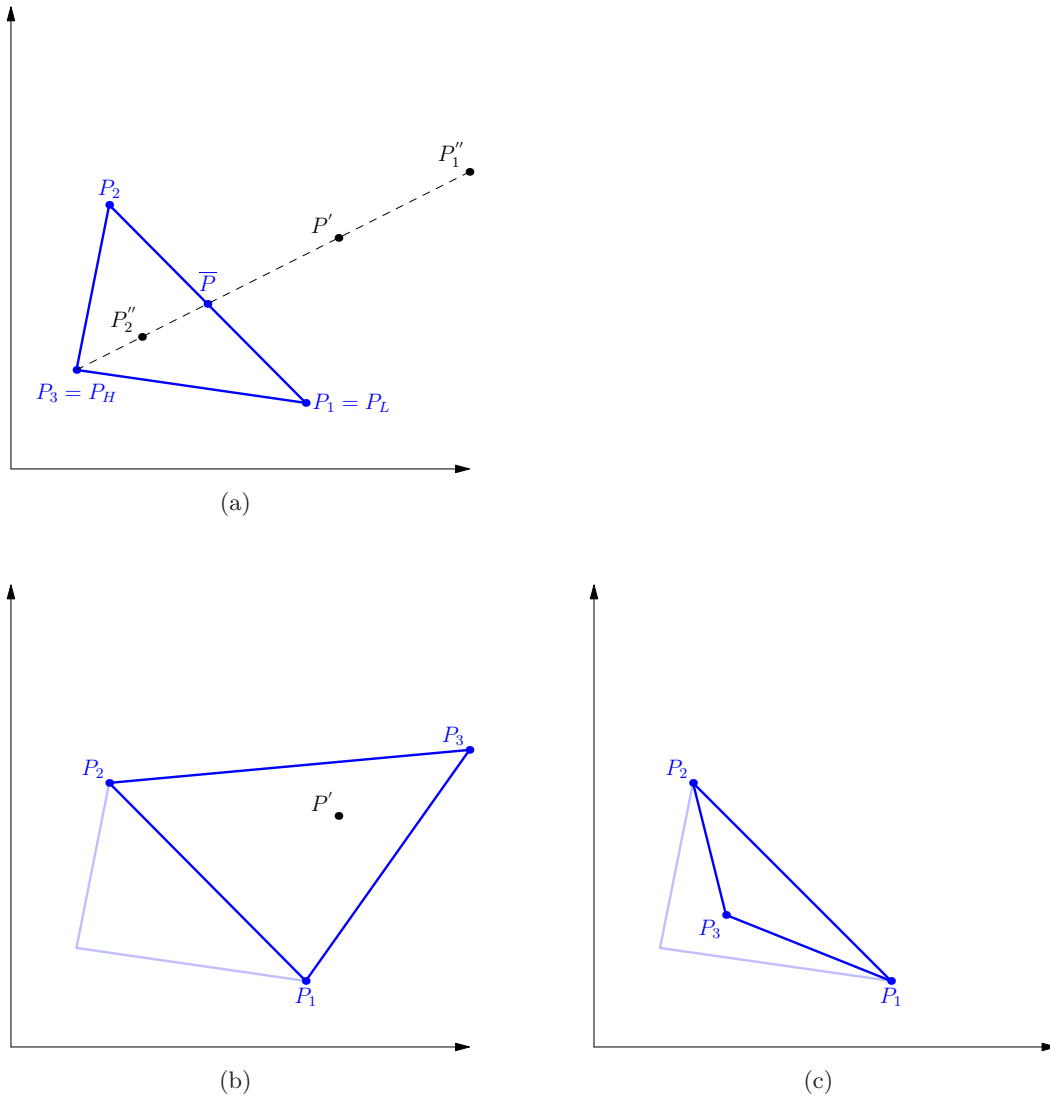
Für den Fall, dass MIGRAD bei der Suche nach dem Minimum der Funktion zunächst scheitern sollte, wechselt MINUIT in den sogenannten SIMPLEX-Modus. Das Simplex ist eine geometrische Figur in einem  $N$ -dimensionalen Raum, welche durch die Koordinaten ihrer  $N + 1$ -Eckpunkte und deren Verbindungslinien vollständig bestimmt ist. Für  $N = 2$  ist das Simplex daher ein Dreieck, für  $N = 3$  ein Tetraeder, für  $N = 4$  ein Pentachoron usw.. Der von R. A. Mead und J. A. Nelder im Jahre 1965 entwickelte Algorithmus [36] (genauer als Downhill-Simplex-Verfahren bezeichnet) nutzt in jedem Schritt die Information aus den Funktionswerten an  $N + 1$  Punkten ihres Definitionsbereiches der Dimension  $N$ , die sich in Gedanken zu einem Simplex verbinden lassen, und hat daher seinen Namen.

Die Startpunkte können beliebig gewählt werden und die Funktion wird an ihnen ausgewertet. Ist  $P_H$  der Punkt, an dem der Funktionswert am größten ist, so wird im Folgenden versucht, diesen durch einen Besseren im Sinne der Minimierung zu ersetzen. Zu diesem Zweck wird der Schwerpunkt  $\bar{P}$  aller Übrigen gebildet:

$$\bar{P} = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^{N+1} P_i - P_H \right\}. \quad (3.8)$$

Ein neuer Punkt wird jetzt auf der Verbindungslinie  $\overline{P_H \bar{P}}$  zunächst mit  $P' = \bar{P} + (\bar{P} - P_H)$  versucht, was einer Spiegelung von  $P_H$  an  $\bar{P}$  entspricht. Ist  $F(P') < F(P_H)$ , ersetzt  $P'$   $P_H$ , andernfalls wird  $P'' = \bar{P} - 1/2(\bar{P} - P_H)$  ausgewertet. Sollte der Funktionswert an dieser Stelle ebenfalls nicht echt kleiner als  $P_H$  sein, wird ein neues Simplex um  $P_L$  (dem Punkt mit dem niedrigsten Funktionswert) errichtet, dessen Seiten um den Faktor 0.5 verkürzt sind. Falls hingegen sogar  $F(P') < F(P_L)$  ist, so setzt man  $P'' = \bar{P} + 2(\bar{P} - P_H)$  für  $P_H$ ; der Punkt, welcher die Funktion minimiert, wird also bei jedem Iterationsschritt von einem Simplex umschlossen. Das Verfahren endet, falls die Differenz  $F(P_H) - F(P_L)$  eine vorher festgelegte, willkürliche Konstante unterläuft.

Der Simplex-Algorithmus zieht seinen Vorteil im Wesentlichen aus seiner Einfachheit und ist dementsprechend verhältnismäßig robust. Obwohl sich der Rechenaufwand in Grenzen hält, da keine ersten und zweiten Ableitungen benötigt werden und die Funktion pro Iterationsschritt an maximal drei Punkten ausgewertet werden muss, ist die Konvergenzgeschwindigkeit eher gering. Im schlimmsten Fall besteht darüber hinaus die Gefahr, dass das Simplex durch Entartung eine oder mehrere Dimensionen verliert. Auch lässt das Verfahren keine Aussagen über den Fehler des rekonstruierten Minimums noch zur etwaigen Parameterkorrelation zu. Die Hauptaufgabe des Simplex-Algorithmus beschränkt sich darauf, einen Punkt nahe genug am tatsächlichen Minimum zu finden,



**Abbildung 3.4:** Der SIMPLEX-Algorithmus in zwei Dimensionen. (a) Die Funktion nehme bei  $P_1 = P_L$  den niedrigsten und bei  $P_3 = P_H$  ihren jeweils höchsten Wert an. Ein neuer Punkt  $P'$  wird nun durch Spiegelung von  $P_H$  an  $\overline{P}$ , dem Schwerpunkt von  $P_1$  und  $P_2$  erhalten. Ist der Funktionswert an dieser Stelle kleiner als bei  $P_H$ , so wird dieser durch  $P'$  ersetzt. Sollte sogar ein neues Minimum gefunden sein, wird das Simplex im nächsten Schritt stattdessen aus  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_1'' = P_3$  gebildet, wie in (b) zu sehen. In den anderen Fällen setzt man  $P_2''$  auf die Hälfte der Strecke  $P_H \overline{P}$  (c). Sollte keiner der so gewählten Punkte eine Verbesserung darstellen, wird ein neues Simplex um  $P_L$  konstruiert, dessen Seiten um den Faktor 0.5 verkürzt sind. Anschließend beginnt das Verfahren von Neuem, bis die Differenz  $F(P_H) - F(P_L)$  kleiner als eine bestimmte, vorher festgelegte Zahl ist.

damit das anschließend erneut gestartete MIGRAD bessere Erfolgschancen hat. Abbildung 3.4 soll zur Veranschaulichung der Arbeitsweise des SIMPLEX-Algorithmus für den zweidimensionalen Fall beitragen.

### 3.4 Markov-Ketten-Monte-Carlo-Verfahren (MKMC)

In der Praxis stellt sich allerdings heraus, dass die stabile Konvergenz in das globale Minimum der  $\chi^2$ -Funktion durch MINUIT allein (abgesehen von einigen wenigen, besonders einfachen Fällen) nicht zuverlässig gewährleistet ist. Dies liegt vor Allem daran, dass MINUIT designbedingt keine Möglichkeit hat, ein etwaiges Nebenminimum als solches zu erkennen und diesem wieder zu entkommen. Daher erweist es sich als unerlässlich, zusätzliche vorbereitende Maßnahmen zu ergreifen, deren erklärtes Ziel es ist, Startwerte bereitzustellen, welche sich in unmittelbarer Nähe des tatsächlichen globalen Minimums befinden. Zu diesem Zweck kann in Fittino optional sogenanntes Simulated Annealing eingesetzt werden. Dabei handelt es sich um eine adaptive Variante des Metropolis-Hastings-Algorithmus, welcher im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

Der Metropolis-Hastings-Algorithmus und damit auch das Simulated Annealing gehören zu denjenigen Monte-Carlo-Verfahren, deren Grundlage eine sogenannte Markov-Kette ist. Darunter versteht man im Allgemeinen eine Klasse von Algorithmen, welche aus einer gegebenen Grund- oder Zustandsmenge  $\{\mathbf{x}\}$  stichprobenartig eine Anzahl an Elementen herauschreiben. Eine Übergangsfunktion  $T(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)})$  ( $T$  für transition function) ordnet jedem dieser Elemente die Wahrscheinlichkeit zu, ausgehend von einem in Schritt  $t$  entnommenen Element  $\mathbf{x}^{(t)}$  im darauf folgenden Schritt  $t + 1$  das Element  $\mathbf{x}^{(t+1)}$  zu erhalten. Weiterhin gilt:

$$T(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = T(\mathbf{y}; \mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Dabei ist insbesondere auch der Übergang zu „sich selbst“ mit einbezogen; das entsprechende Element wird ein weiteres Mal ausgewählt. Bildlich lässt sich der Entnahmevorgang also als wachsende Kette vorstellen, der ständig neue Glieder in Form von Elementen hinzugefügt werden. Wesentlich ist in diesem Zusammenhang die nach A. A. Markov benannte Eigenschaft der Kette, dass die Übergangswahrscheinlichkeit  $T$  nur von der gegenwärtigen Position im Zustandsraum abhängt und nicht etwa von bereits erfolgten Übergängen. In Formeln ausgedrückt bedeutet dies:

$$T(\mathbf{x}^{(t+1)} | \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(t)}) = T(\mathbf{x}^{(t+1)} | \mathbf{x}^{(t)}), \quad (3.10)$$

wobei  $T(\mathbf{y} | \{\mathbf{x}\})$  die Übergangswahrscheinlichkeit nach  $\mathbf{y}$  unter der Bedingung, dass die Kette bisher aus den Elementen  $\{\mathbf{x}\}$  besteht, bezeichnet. Auf diese Weise lassen sich Häufigkeitsverteilungen von Elementen erzeugen, deren Verlauf nicht durch einen analytischen Ausdruck gegeben sein muss. Es ist hingegen vollkommen ausreichend, dass eine der zu approximierenden Verteilung proportionale Funktion an jedem Punkt ihres Definitionsbereichs effektiv berechnet werden kann.

Auf den Fall der Parameterrekonstruktion angewendet bedeutet dies, nun ein Werkzeug zur Verfügung zu haben, welches die fragliche  $\chi^2$ -Verteilung zum Einen weiträumig durchmustert, dabei aber zum Anderen gerade den interessanten Regionen besondere Aufmerksamkeit zukommen lässt. Der Algorithmus bewegt sich nämlich bevorzugt in der Nähe von niedrigen  $\chi^2$ -Werten, da dies, wie später noch genauer gezeigt wird, einer hohen Wahrscheinlichkeit entspricht und ist damit einem simpleren Ansatz, wie z. B. dem schlichten Durchrastern eines Gitters von Punkten im Parameterraum weit überlegen. In Abschnitt 3.4.2 wird überdies beschrieben, wie sich dieses



Verhalten der Markov-Kette nutzen lässt, um jedem Parametersatz eine sogenannte Likelihood zuzuordnen, also einen Wert der proportional zur Wahrscheinlichkeit ist, dass ein bestimmtes Modell durch den Parametersatz realisiert ist. Zu den wünschenswerten Eigenschaften zählt nicht zuletzt die Tatsache, dass das stochastische Verfahren linear mit der Dimension der Grundmenge skaliert und nicht wie bei der Gitter-Suche mit der Dimension zur Potenz, da die Zahl der freien SUSY-Parameter, wie bereits gesehen, typischerweise recht hoch ist. Der bei diesem großflächigen Abtasten ausgemachte Parametersatz, welcher das insgesamt niedrigste  $\chi^2$  produziert hat, kann dann als vielversprechender Startpunkt für den MINUIT-Fit dienen.

### 3.4.1 Der Metropolis-Hastings-Algorithmus/Simulated Annealing

Der Metropolis-Hastings-Algorithmus dient zur Erzeugung einer zufälligen Folge von Elementen  $\mathbf{x}$  aus einer Grundmenge entsprechend einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(\mathbf{x})$ . Das Verfahren wurde zuerst im Jahre 1953 von N. Metropolis für den Spezialfall der Boltzmann-Verteilung entwickelt und später (1970) durch W. K. Hastings verallgemeinert und erweitert. Diese Grundmenge wird im Fall der Rekonstruktion durch die Gesamtheit aller Vektoren des Parameterraums gebildet. Die Übergangswahrscheinlichkeit  $T(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)})$  setzt sich aus zwei Teilen zusammen: Eine Vorschlagfunktion  $Q(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)})$  bietet dem Algorithmus im Schritt  $t + 1$  einen Kandidaten  $\mathbf{x}^{(t+1)}$  an, der dann mit einer Wahrscheinlichkeit  $A(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)})$  akzeptiert wird. In der ursprünglichen Formulierung von Metropolis wählt die Vorschlagsfunktion den neuen Punkt gleichverteilt aus einer Kugel mit festem Radius um das Ursprungselement. In Fittino hingegen ist diese durch eine Normalverteilung  $N$  gegeben:

$$Q(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)}) \sim N(\mathbf{x}^{(t)}; \sigma), \quad (3.11)$$

wobei  $\sigma$  den Vektor der Standardabweichungen bezeichnet und damit ein Maß für die „Schrittweite“ des Algorithmus vorgibt. Die Vorschlagfunktion hängt dabei also nicht von  $\mathbf{x}^{(t+1)}$  ab. Der Anwender kann die anfängliche Standardabweichung zu Beginn des Fits für jeden Parameter frei wählen. Legt man jedoch die Startparameter unter Verwendung von Born-Niveau-Beziehungen fest, so wird sie aus der Abweichung der Parameterwerte von ihren Zentralwerten nach mehrfacher Variation der Observablen innerhalb ihrer Unsicherheiten automatisch berechnet. Im weiteren Verlauf wird dann diese Schrittweite pro Parameter individuell angepasst.

Die Akzeptanzfunktion hat im Allgemeinen die Form

$$A(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)}) = \frac{P(\mathbf{x}^{(t+1)})Q(\mathbf{x}^{(t)}; \mathbf{x}^{(t+1)})}{P(\mathbf{x}^{(t)})Q(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)})}, \quad (3.12)$$

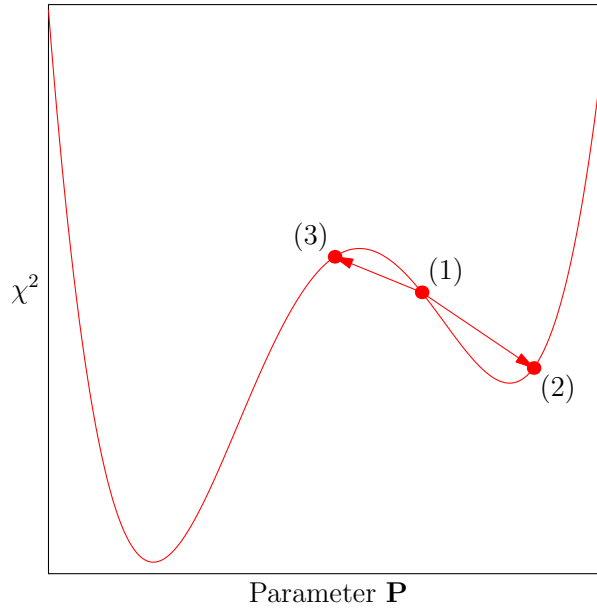
wobei  $P(\mathbf{x})$  eine beliebige Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Für symmetrische Vorschlagfunktionen mit  $Q(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)}) = Q(\mathbf{x}^{(t)}; \mathbf{x}^{(t+1)})$ , also insbesondere für die Normalverteilung reduziert sich die Akzeptanzfunktion zu

$$A(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)}) = \frac{P(\mathbf{x}^{(t+1)})}{P(\mathbf{x}^{(t)})}. \quad (3.13)$$

Die vollständige Übergangsfunktion ergibt sich nun nach der Produktregel für Wahrscheinlichkeiten zu

$$T(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)}) = Q(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)})A(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)}). \quad (3.14)$$





**Abbildung 3.5:** Schematische Darstellung des Metropolis-Hastings-Algorithmus. Die  $\chi^2$ -Funktion wird als Potenzial betrachtet. Der Übergang von Punkt (1) nach Punkt (2) liefert einen kleineren Wert für das  $\chi^2$  und wird daher immer akzeptiert. Hingegen wird der Übergang nach Punkt (3) mit der Boltzmann-Wahrscheinlichkeit bei der Temperatur  $T$  akzeptiert. Der Algorithmus ist auf diese Weise dem Nebenminimum entkommen.

Mit dieser Übergangsfunktion besitzt der Metropolis-Hastings-Algorithmus also alle Eigenschaften einer Markov-Kette. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist nach Metropolis durch die Boltzmann-Verteilung gegeben:

$$P(\mathbf{x}^{(t)}) = \exp\left(-\frac{E(\mathbf{x}^{(t)})}{T}\right), \quad (3.15)$$

wobei  $E$  die Energie und  $T$  die Temperatur des Systems ist. Bei der Parameterrekonstruktion tritt an die Stelle der Energie die  $\chi^2$ -Funktion:  $E(\mathbf{x}^{(t)}) \equiv \chi^2(\mathbf{P}^{(t)})$ . Obwohl der Kontrollparameter  $T$  in diesem Fall keine physikalische Bedeutung mehr hat, wird er weiterhin allgemein als Temperatur bezeichnet. Die vollständige Akzeptanzfunktion lautet schließlich:

$$A = \exp\left(-\frac{\chi^2(i) - \chi^2(i-1)}{T}\right). \quad (3.16)$$

Ist nun  $\chi^2(i) > \chi^2(i-1)$ , so wird der zu diesem besseren  $\chi^2$  gehörende Parametersatz der Markov-Kette hinzugefügt. Ist hingegen  $\chi^2(i) < \chi^2(i-1)$ , so akzeptiert der Algorithmus den schlechteren Parametersatz mit der Wahrscheinlichkeit  $A$  (siehe auch Abbildung 3.5). Sollte der neue Parametersatz an dieser Stelle nicht akzeptiert werden, so werden die aktuellen Parameterwerte zunächst beibehalten (der fragliche Satz wird demnach ein weiteres Mal der Kette hinzugefügt).

Vor der nächsten Iteration wird die Schrittweite der Vorschlagfunktion für jeden Parameter einzeln angepasst. Dazu wird der Parametersatz mit der alten Schrittweite 20 Mal variiert und die

Anzahl der akzeptierten Sätze gezählt. Die neue Schrittweite wird nun so gewählt, dass das Verhältnis aus akzeptierten und allen Sätzen  $n_{\text{akz}}/n_{\text{tot}}$  einen Wert zwischen 0.4 und 0.6 annimmt:

$$\Delta\sigma_i > 0.6 : \Delta\sigma_i^{\text{neu}} = \Delta\sigma_i^{\text{alt}} \left( 2 \frac{\frac{n_{\text{akz}}}{n_{\text{tot}}} - 0.6}{0.4} + 1 \right) \quad (3.17)$$

oder

$$\Delta\sigma_i < 0.4 : \Delta\sigma_i^{\text{neu}} = \Delta\sigma_i^{\text{alt}} \left( \frac{1}{2 \frac{0.4 - \frac{n_{\text{akz}}}{n_{\text{tot}}}}{0.4} + 1} \right). \quad (3.18)$$

Auf diese Weise wird verfahren, bis  $3n$   $\chi^2$ -Werte der Markov-Kette hinzugefügt wurden, wobei  $n$  die Anzahl der Parameter ist (mindestens jedoch 60, falls  $n < 20$ ). Derjenige Parametersatz, der hierbei jeweils den niedrigsten  $\chi^2$ -Wert zur Folge hatte, dient nun als Ausgangspunkt für die sich anschließende Iterationsstufe, bei welcher der Kontrollparameter  $T$  um einen konstanten Faktor  $r$  reduziert wird. Diese schrittweise Verringerung der Temperatur wird auch als Simulated Annealing bezeichnet. Der neue Parameter  $T'$  wird demnach zu

$$T' = rT \quad \text{für } r < 1 \quad (3.19)$$

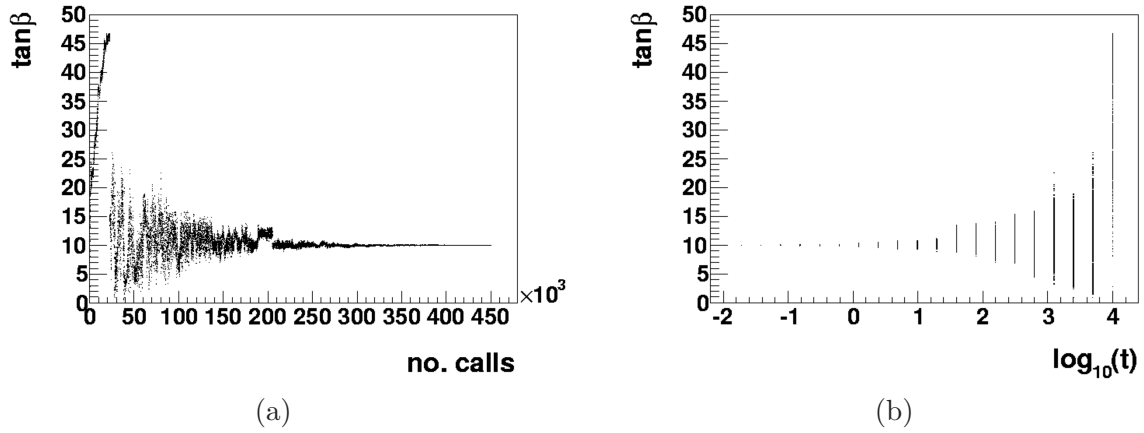
erhalten. Dies hat den Effekt, dass zu Beginn, wenn die Temperatur hoch ist, steile Potenzialbarrieren überwunden werden und der Algorithmus damit eventuellen Nebenminima entkommt. So kann insgesamt ein großer Bereich des Parameterraumes ausgewertet werden. Im weiteren Verlauf wird das Erklimmen von Potenzialwänden mit sinkender Temperatur immer unwahrscheinlicher. Stattdessen untersucht der Algorithmus nun die Umgebungen der vielversprechenden Einsenkungen etwas ausdauernder, in der Hoffnung, dabei tatsächlich das globale Minimum zu finden. Die Prozedur endet, falls entweder eine zuvor vom Anwender zu bestimmende Anzahl an Iterationsschritten erreicht oder sich die  $\chi^2$ -Werte nach Variation der Parameterwerte nur noch äußerst geringfügig ändern.

Ihren Namen hat die Methode aufgrund der Ähnlichkeit zu den Vorgängen, die sich beim langsamen Ausglühen eines zuvor erhitzten Festkörpers abspielen. Befinden sich die einzelnen Atome des Kristallgitters am Anfang in heftiger Bewegung, so bewirkt das Abkühlen, dass diese nach und nach den Zustand geringster Energie annehmen. Simulated Annealing hat sich als robustes, stabiles Verfahren zur globalen Funktionsminimierung erwiesen. Die Wirkungsweise ist in Abbildung 3.6 noch einmal mit Bezug auf die Parameterrekonstruktion anschaulich dargestellt.

### 3.4.2 Likelihood-Karten

In Abschnitt 3.4 wurde bereits darauf hingewiesen, dass der Metropolis-Hastings-Algorithmus mit einer höheren Wahrscheinlichkeit Parameterwerte herausschreibt, die die gemessenen Observablen im Rahmen des Modells gut reproduzieren. Dies soll im Folgenden präzisiert werden.

Während das Ziel des Simulated Annealing darin besteht, *einen* Parametersatz zu finden, der die  $\chi^2$ -Funktion minimiert (oder dem Minimum zumindest sehr nahe kommt), nachdem ein möglichst großer Teil des betrachteten Parameterraumes durchsucht wurde, gewinnt man einen wesentlich umfassenderen Einblick durch die Verwendung der Wahrscheinlichkeitsinformation *jedes* entnommenen Parametersatzes. Diese Information, die jedem der extrahierten Punkte zugeordnet ist, wird



**Abbildung 3.6:** Anschauliche Darstellung der Parameterrekonstruktion mit Hilfe von Simulated Annealing. (a) Der durchmusterte Wertebereich von  $\tan \beta$  ist gegen die Anzahl der SPheno-Funktionsaufrufe aufgetragen. Wie leicht zu erkennen ist, erstrecken sich die möglichen Werte zu Beginn über einen großen Bereich und ziehen sich im weiteren Verlauf um den wahren Wert von 10 bei SPS1a zusammen. Bei etwa 200000 Funktionsaufrufen ist ein deutlicher Sprung in dem bevorzugten Wert zu beobachten. Offensichtlich gerät der Algorithmus hier zunächst in den Einfluss eines weiteren Minimums bei etwa  $\tan \beta = 12$ , kann diesem aber entkommen. In (b) sind die Parameterwerte in Abhängigkeit von der jeweiligen Temperaturstufe zu sehen (Abbildung aus [15]).

durch den Begriff der Likelihood konkretisiert. Die Gesamtheit der aus den Parameterpunkten und ihrer Likelihood bestehenden Wertepaare bilden dann eine sogenannte Likelihood-Karte [9], welche ein anschauliches Bild von der durch die Messung bevorzugten Parameterpunkte liefert (siehe hierzu auch Abbildung 3.7).

Obwohl das Wort „likelihood“ im Deutschen mit „Wahrscheinlichkeit“ übersetzt werden kann, muss deutlich von der Wahrscheinlichkeit unterschieden werden, die im Englischen mit „probability“ bezeichnet wird (im Folgenden ist letztere gemeint, wenn von der Wahrscheinlichkeit die Rede ist). Die Wahrscheinlichkeit macht eine Aussage über den möglichen (aber zunächst unbekannten) Ausgang eines Zufallsexperimentes, dessen charakterisierende Parameter vollständig bekannt sind. Im Gegensatz dazu bewertet die Likelihood den Versuch, aus einem vorliegenden Ausgang eines solchen Experiments auf die Parameter des zugrundeliegenden Modells zu schließen. Da hier offensichtlich nicht alle denkbaren Modelle berücksichtigt werden können, werden meist nur einige wenige oder sogar nur ein einziges als gegeben vorausgesetzt. Die Likelihood lässt sich aus diesem Grund im Allgemeinen nicht auf 1 normieren (was zu den Definitionskriterien einer Wahrscheinlichkeit gehört) und kann daher eine bestimmte Situation nur im Sinne von „besser“ oder „schlechter“ beurteilen: die höchste Likelihood (maximum likelihood) stellt somit die beste Schätzung der Parameter des Modells dar, der numerische Wert selbst hat allerdings keine Bedeutung.

Die Likelihood  $L$  ist definiert durch

$$L = (x_1, \dots, x_n; \mathbf{a}) = \prod P(x_i; \mathbf{a}), \quad (3.20)$$

(z. B. in [16]) also als Produkt über alle Einzelwahrscheinlichkeiten des angenommenen Modells unter Voraussetzung eines Parametersatzes  $\mathbf{a}$ , den Messwert  $x_i$  zu erhalten. Den Zusammenhang

zwischen der Likelihood und der Wahrscheinlichkeit stellt der Satz von Bayes her:

$$P(A|B) \propto L(A|B) \cdot P(A), \quad (3.21)$$

wobei  $P(A|B)$  die Wahrscheinlichkeit für  $A$  unter der Bedingung  $B$  ist. Diesem kommt aber aufgrund der bereits genannten Schwierigkeit, dass insbesondere  $P(A)$  in den meisten interessanten Fällen unbekannt ist, lediglich theoretische Bedeutung zu. Relevant ist daher nur das Verhältnis

$$\frac{L(x^{(t+1)})}{L(x^{(t)})}. \quad (3.22)$$

Die Aufgabe besteht nun also darin, eine Markov-Kette zu konstruieren, welche die Parameter mit einer Häufigkeit herausschreibt, die ihrer Likelihood proportional ist. Eine Akzeptanzfunktion der Form

$$A = \min \left( 1, \frac{L(x^{(t+1)})}{L(x^{(t)})} \right) \quad (3.23)$$

erfüllt die geforderte Bedingung. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Modell  $f(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ , charakterisiert durch den Parametersatz  $\mathbf{a}$ , den unkorrelierten Datensatz  $\mathbf{x}$  hervorgebracht hat, ist unter der Annahme, dass die Daten gaußförmig um den wahren Wert streuen, gegeben durch

$$P(x_i; \mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left( -\frac{(x_i - f(\mathbf{a}))^2}{2\sigma_i^2} \right). \quad (3.24)$$

Die Likelihood ist damit

$$L \propto \exp \left( -\frac{\chi^2}{2} \right). \quad (3.25)$$

Als Vorschlagfunktion wählt man wieder eine Normalverteilung um den aktuell entnommenen Punkt:

$$Q(\mathbf{x}^{(t+1)}, \mathbf{x}^{(t)}) = \prod_{k=1}^D \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp -\frac{(x_k^{(t+1)} - x_k^{(t)})^2}{2\sigma_k^2}. \quad (3.26)$$

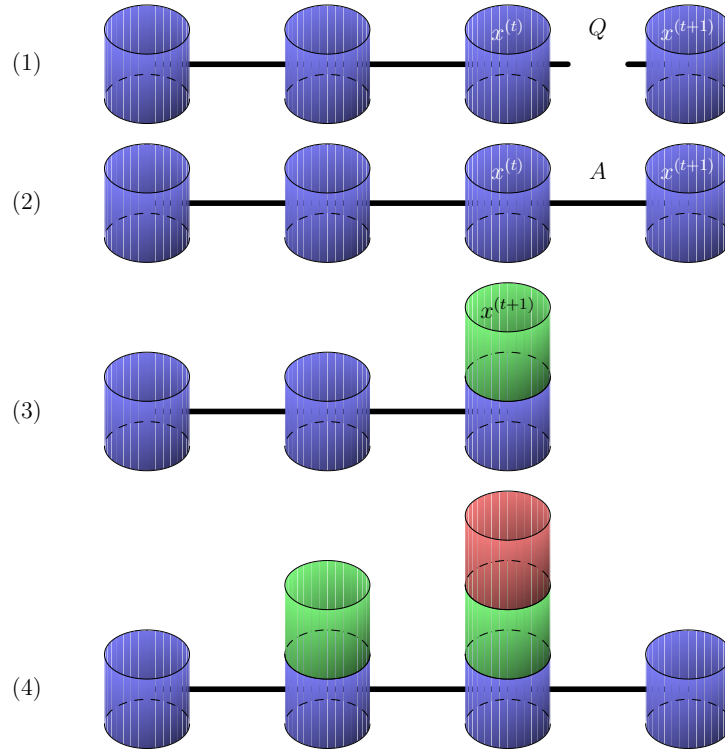
Schließlich erhält man die vollständige Übergangsfunktion der Kette zu

$$T(x^{(t+1)}; x^{(t)}) = Q(x^{(t+1)}; x^{(t)}) \min \left( 1, \frac{L(x^{(t+1)})}{L(x^{(t)})} \right), \quad (3.27)$$

wobei

$$\frac{L(x^{(t+1)})}{L(x^{(t)})} = \exp \left( -\chi^2(x^{(t+1)}) + \chi^2(x^{(t)}) \right) \quad (3.28)$$

ist.



**Abbildung 3.7:** Schematische Darstellung der Entstehung einer Likelihood-Karte als Beispiel für eine Markov-Kette. (1) Sei  $\mathbf{x}^{(t)}$  das in Schritt  $t$  der Kette aktuell hinzugefügte Element. Ein neues Element  $\mathbf{x}^{(t+1)}$  wird der Kette durch die Vorschlagfunktion  $Q$  mit der Wahrscheinlichkeit  $Q(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)})$  angeboten. Das neue Element wird durch die Akzeptanzfunktion  $A$  mit der Wahrscheinlichkeit  $A(\mathbf{x}^{(t+1)}; \mathbf{x}^{(t)})$  akzeptiert und der Kette hinzugefügt (2). Wird es hingegen verworfen, so wird in Schritt  $t + 1$  das Element  $\mathbf{x}^{(t)}$  erneut herausgeschrieben, es gilt:  $\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)}$  (3). Die Häufigkeit, mit der ein Punkt herausgeschrieben wird, ist seiner Likelihood proportional. Die auf diese Weise erhaltene Likelihood-Karte, projiziert auf die durch zwei Parameter aufgespannte Ebene, vermittelt ein anschauliches und umfassendes Bild von dem betrachteten Parameterraum.

### 3.5 Erste Studien mit Fittino

In einer dieser Arbeit vorausgehenden Studie [14] wurden die Niederenergieparameter des MSSM mit Fittino an die kombinierten Messungen an LHC und ILC angepasst. Zusätzlich zu den Vereinfachungen, die auf das MSSM-24 geführt haben, werden die Massen der ersten beiden Generationen des Squark-Sektors als entartet angenommen. Durch die Einführung universeller Massen  $M_{\tilde{q}_L}$  und  $M_{\tilde{q}_R}$  für die Superpartner von up-, down-, charm- und strange-Quark reduziert sich die Anzahl der freien Parameter weiter auf nunmehr insgesamt 18. Hinzu tritt die Masse des top-Quarks, welche experimentell bisher relativ ungenau bestimmt ist und durch ihren starken Einfluss auf andere Parameter einen beträchtlichen Unsicherheitsfaktor darstellt. Das Modell wird in diesem Zusammenhang daher im Folgenden mit MSSM-19 bezeichnet. Um die Korrelationen der trilinearen Kopplungskonstanten  $A_t$ ,  $A_b$  und  $A_\tau$  mit  $\tan\beta$  und  $\mu$  zu verringern, werden stattdessen als weitere Besonderheit die Größen

$$\begin{aligned} X_t &= A_t - \mu/\tan\beta \\ X_b &= A_b - \mu\tan\beta \\ X_\tau &= A_\tau - \mu\tan\beta \end{aligned}$$

verwendet.

Im Vorgriff auf umfangreichere Ausführungen zu Beginn des nächsten Kapitels (hier insbesondere Abschnitt 4.1) sei an dieser Stelle bereits erwähnt, dass in Ermangelung echter Daten die Erprobung der Qualität der Rekonstruktion anhand von simulierten Messungen vorgenommen werden muss. Hierfür sucht man sich einen besonders charakteristischen Punkt aus dem Parameterraum heraus, produziert auf dieser Grundlage einen Satz von Observablen und analysiert die zu erwartenden Unsicherheiten. In der hier vorgestellten Studie wurde der sogenannte Benchmark-Punkt SPS1a' [23] ausgewählt, der sich nur leicht von dem in dieser Arbeit verwendeten Punkt SPS1a unterscheidet. SPS1a' ist definiert durch die mSUGRA-Parameterwerte

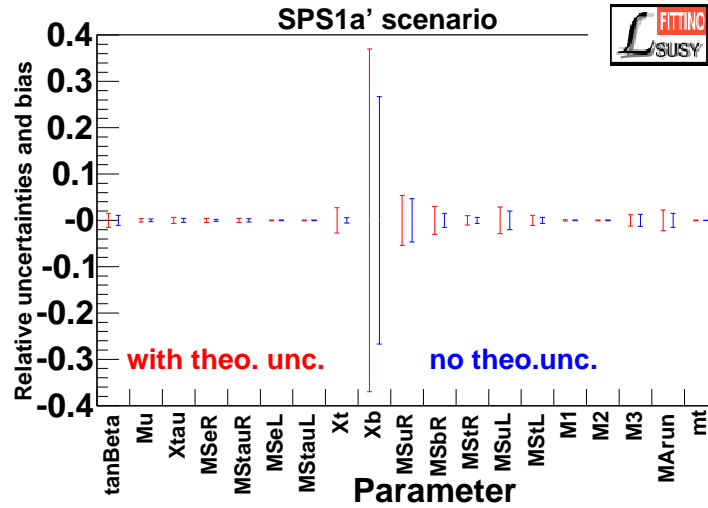
- $M_0 = 70 \text{ GeV}$
- $M_{1/2} = 250 \text{ GeV}$
- $\tan\beta = 10$
- $A_0 = -300 \text{ GeV}$
- $\text{sign}\mu = 1$

Als Ergebnis des Parameterfits müssen diese Werte also letztlich aus den Observablen reproduziert werden. Hierfür wurde Fittino in der Version 1.1.1 und SPheno 2.2.2 benutzt.

Dem eigentlichen Fit geht eine mehrstufiges, iteratives Verfahren voraus, welches auf die Bereitstellung eines Parametersatzes abzielt, der sich in unmittelbarer Nähe der „wahren“, zu SPS1a' gehörenden Werte befindet. Im ersten Schritt werden die Startparameter direkt aus den Observablen unter Verwendung einiger Born-Niveau-Beziehungen berechnet. Der Fehler auf die Parameter ergibt sich aus der Standardabweichung einer Verteilung, die durch mehrfache Variation der Observablenwerte innerhalb ihrer Unsicherheiten erhalten wird. Es schließt sich ein Fit in diversen Untersektoren des MSSM an. Hierbei macht man sich zunutze, dass die Parameter eines

bestimmten Sektors (z. B. des Slepton-Sektors) im Wesentlichen durch wenige assoziierte Observablen bestimmt sind (Kinematische Massenkanten aus Slepton-Zerfällen, Wirkungsquerschnitte der Slepton-Produktion). Die Parameter der übrigen Sektoren werden auf ihren Startwerten festgehalten. Als Alternative steht ein globaler Fit aller Parameter an alle Observablen mit Simulated Annealing zur Verfügung.

Um die Auswirkungen der ungenau bekannten Energieskala, bei der Vereinheitlichung stattfindet, und der Korrekturen höherer Ordnung auf die Parameterrekonstruktion zu untersuchen, werden die Ergebnisse, welche ausschließlich auf der Grundlage von experimentellen Fehlern beruhen, mit den Resultaten verglichen, bei denen auch diese theoretischen Unsicherheiten berücksichtigt wurden. Dazu wird die Vereinheitlichungsskala variiert und mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichungen und unter Verwendung aller verfügbaren Korrekturen höherer Ordnung auf die Niederenergieparameter zurückgerechnet. Die theoretische Unsicherheit durch die unbekannte Vereinheitlichungsskala wird dann aus der Varianz der Verteilung der Niederenergieparameter erhalten.



**Abbildung 3.8:** Relative Genauigkeit der Parameter des rekonstruierten MSSM-19 mit (linke Fehlerbalken, in rot) und ohne (rechte Fehlerbalken, in blau) Berücksichtigung theoretischer Unsicherheiten (Abbildung aus [14]).

In Abbildung 3.8 ist das Resultat der Rekonstruktion in einem Diagramm dargestellt. Hier ist zu sehen, dass sich die relativen Unsicherheiten der meisten Parameter im Bereich weniger Prozent bewegen. Theoretische Fehler zeigen einen Effekt, lassen aber in vielen Fällen die Größenordnung des Gesamtfehlers unverändert. Der nächste Schritt besteht nun in der Extrapolation der Parameterwerte zu höheren Energieskalen. Dies kann nun allein unter Verwendung der Renormierungsgruppengleichungen geschehen, ohne nähere Annahmen über einen konkreten Brechungsmechanismus zu machen (Bottom-Up-Approach). Allerdings geht man hier davon aus, dass keine weiteren, noch schwereren Teilchen existieren. Auf diese Weise können theoretische Vorhersagen, wie z. B. die Vereinheitlichung von Parametern auf der GUT-Skala, unter Ausnutzung der maximal möglichen Information aus dem Experiment bei gleichzeitig minimalen Voraussetzungen an das Modell überprüft werden. Es wird jedoch explizit erwähnt, dass für diese Studie die Kombination der Observablen an LHC und ILC zwingend notwendig war, um eine stabile Konvergenz des Fits zu

	SPS1a' Wert	Gefitteter Wert	$\Delta_{\text{LHC+ILC}}$	$\Delta_{\text{LHC}}$
$\tan \beta$	10.000	10.000	0.036	1.3
$M_0$ (GeV)	70.000	70.000	0.070	1.4
$M_{1/2}$ (GeV)	250.000	250.000	0.065	1.0
$A_0$ (GeV)	-300.0	-300.0	2.5	16.6

**Tabelle 3.1:** Resultate eines Fits an ein mSUGRA-Szenario. Die einzelnen Spalten bedeuten von links nach rechts: nominelle Werte (SPS1a'), die gefitteten mSUGRA-Parameter, Unsicherheiten auf die Parameter eines Fits mit kombinierten LHC+ILC-Observablen und die Unsicherheiten auf die Parameter für einen Fit, welcher nur LHC-Observable verwendet. In beiden Fällen sind theoretische Unsicherheiten nicht mit einbezogen (Tabelle aus [14]).

erreichen. Die Messungen an einer Maschine allein reichen nicht aus.

Zusätzlich wurde mit denselben Observablen ein Fit an mSUGRA durchgeführt. Die rekonstruierten Parameter mit ihren Unsicherheiten sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Bei diesem „harmloseren“ Modell mit lediglich vier freien Parametern gelingt die Rekonstruktion auch allein auf der Grundlage von LHC-Observablen.

Die vorliegende Arbeit knüpft an die so erhaltenen, bisherigen Ergebnisse an. Die mSUGRA-Parameter werden an den seither stetig gewachsenen Satz an untersuchten LHC-Observablen, ergänzt durch eine Auswahl an Präzisionsmessungen des Standardmodells, angepasst. Desweiteren wird der Einfluss der Korrelationen unter den Observablen berücksichtigt. Die Rekonstruktion wird zudem getrennt nach verschiedenen Luminositäten durchgeführt, um die Entwicklung der Präzision auf die Parameter mit der Laufzeit des Experimente am LHC nachzuvollziehen. Erstmals wird die Rekonstruktion durch die oben besprochenen Likelihood-Karten veranschaulicht und unterstützt. Im folgenden Abschnitt werden alle für diese Arbeit verwendeten LHC-Observablen, ihre Unsicherheiten sowie Korrelationen in einigem Detail besprochen.



# Kapitel 4

## Observable am LHC

Nachdem in Kapitel 3 in die für das Verständnis der Funktionsweise von Fittino wichtigen Techniken und Verfahren eingeführt wurde, soll im Folgenden der Blick auf die zahlreichen experimentellen Messungen gerichtet werden, welche der Rekonstruktion der Modellparameter zugrunde liegen. In Vorbereitung auf die Datennahme am LHC sind in der Vergangenheit umfangreiche Simulationen der zu erwartenden supersymmetrischen Prozesse und ihrer Nachweismöglichkeiten in den Detektoren ATLAS [6] und CMS [21] durchgeführt worden. Natürlich können in diesen Analysen nicht alle denkbaren Kombinationen von Parameterwerten im Detail studiert werden. Aus diesem Grund und um eine gewisse Vergleichbarkeit zu gewährleisten, ist man in der Auswahl einiger weniger Standardpunkte übereingekommen, die repräsentativ für bestimmte, sich in ihrer Phänomenologie qualitativ unterscheidenden Klassen von Supersymmetrie gelten. Aus diesen Benchmark-Punkten gehen dann die Massen und Kopplungskonstanten aller miteinander wechselwirkenden Teilchen hervor. Hauptergebnis jeder Analyse ist schließlich eine realistische Abschätzung des zu erwartenden Fehlers auf die gemessenen Werte der untersuchten physikalischen Observablen. In Abschnitt 4.1 wird zunächst der für die Rekonstruktion betrachtete Benchmark-Punkt vorgestellt. Die Zentralwerte der Observablen werden dann ausgehend von diesem Punkt berechnet, die Unsicherheiten auf die Messung und Angaben über eventuelle Korrelationen entstammen der entsprechenden Studie. Als Ergebnis der Rekonstruktion wird also die Reproduktion der Werte des Parameterpunktes erwartet. Im Anschluss folgt eine kurze Besprechung aller Analysen, die für den globalen Fit der mSUGRA-Parameter verwendet wurden.

### 4.1 Der Parameterpunkt SPS1a

Der für diese Arbeit untersuchte Parameter-Benchmarkpunkt ist SPS1a (SPS, Snowmass Points And Slopes) [23]. Das zugehörige Spektrum besteht aus insgesamt eher leichten supersymmetrischen Teilchen und liegt vollständig in dem von LHC abgedeckten Energiebereich, aber auch am ILC, der bei einer geplanten Schwerpunktsenergie von bis zu 1 TeV operiert, wird ein Großteil der interessanten Prozesse zugänglich sein. Aus diesem Grund gehört SPS1a zu den meistuntersuchten SUSY-Szenarien mit einer Vielzahl an gut dokumentierten Analysen zur Gewinnung von physikalischen Observablen und ihrer Unsicherheiten aus den simulierten Daten.

Der Punkt ist definiert über die Niederenergiegewerte der Teilchenmassen, wie sie aus den folgenden Werten für die mSUGRA-Parameter auf der Vereinheitlichungsskala mit dem Spektrum-Kalkulator ISAJET [11] in der Version 7.58 errechnet werden:

- $M_0 = 100 \text{ GeV}$
- $M_{1/2} = 250 \text{ GeV}$
- $\tan \beta = 10$
- $A_0 = -100 \text{ GeV}$
- $\text{sign} \mu = 1$

zusammen mit der Parameter-Line

$$M_0 = -A_0 = 0.4M_{1/2}, \quad M_{1/2} \text{ variiert.} \quad (4.1)$$

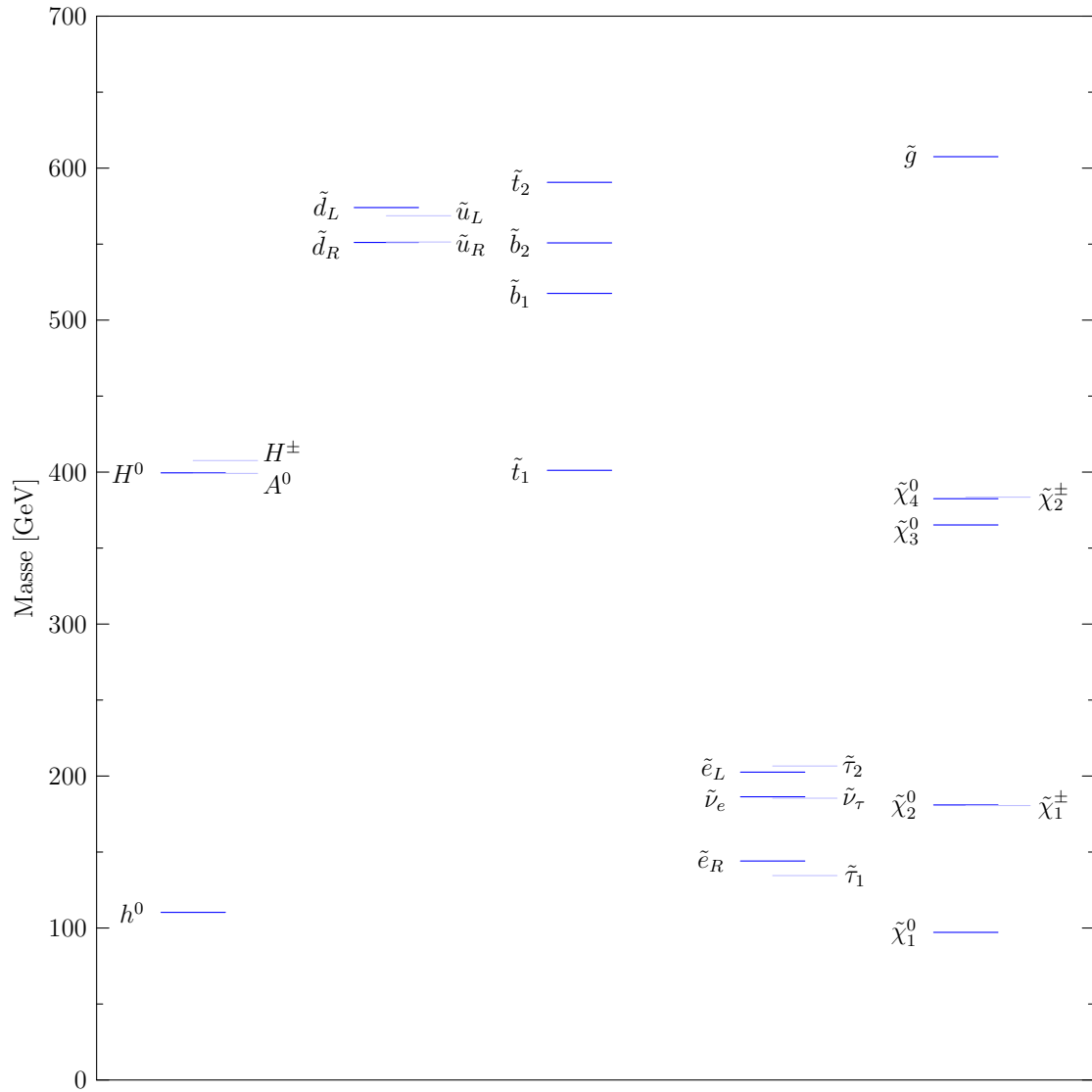
Die Angabe dieser Parameter fungiert daher oft als eine Art Abkürzung für den betrachteten Punkt. In Tabelle 4.1 und in Abbildung 4.1 sind die so erhaltenen Massen aller supersymmetrische Teilchen aufgeführt. Man beachte ferner, dass die Massen der up- und down-artigen Squarks in den ersten beiden Generationen nahezu identisch sind (so ist also z. B.  $m_{\tilde{u}_R} \approx m_{\tilde{c}_R}$ ). Die Berechnungen wurden in diesem Fall von SPheno durchgeführt, da dieses Programm auch die Erzeugung des Massenspektrums in Fittino übernimmt. Die numerischen Werte variieren im Vergleich zu dem ISAJET-Standard nur leicht (im einstelligen Prozentbereich). Nicht zuletzt sollte erwähnt werden, dass die von SPS1a generierten Massen eine Reliktdichte an dunkler Materie zur Folge hätte, die etwas außerhalb des mit den Daten übereinstimmen Bereichs liegt, die mit WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), einer Weltraumsonde, welche seit dem Jahr 2001 Anisotropien der kosmischen Hintergrundstrahlung vermisst, gewonnen wurden [28]. Eine Verschiebung der Werte in den erlaubten Bereich ist jedoch möglich, ohne grundlegende Änderungen der Signaturen in den Detektoren befürchten zu müssen.

#### 4.1.1 Kinematische Massenkanten

Die Masse eines instabilen Teilchens lässt sich aus der invarianten Masse  $M$  seiner Zerfallsprodukte bestimmen. Diese erhält man aus der Messung der Energie  $E_i$  und des Impulses  $\mathbf{p}_i$  (und damit des Vierer-Impulses  $P_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ ) aller in dem Zerfall entstandenen Teilchen gemäß

$$M^2 = P_{\text{ges}}^2 = \left( \sum_i P_i \right)^2. \quad (4.2)$$

Je größer die Masse eines Teilchen ist, desto größer ist die Anzahl der Zerfallsmöglichkeiten in leichtere Teilchen. Da die in Proton-Proton-Kollisionen stattfindenden Reaktionen der starken Wechselwirkung unterliegen, werden in R-Parität erhaltenen Prozessen stets Paare von Squarks und Gluinos oder eine Kombination aus einem Squark und einem Gluino erzeugt. Diese gehören in vielen Szenarien zu den schwersten SUSY-Teilchen (z. B. hat das Gluino in dem betrachteten Punkt eine Masse von etwa 600 GeV, siehe auch Abbildung 4.1) und zerfallen daher rasch in leichtere, die aber wiederum instabil sind. Auf diese Weise bildet sich eine regelrechte Zerfallskaskade mit mehreren Zwischenschritten heraus, welche schließlich mit dem leichtesten supersymmetrischen Teilchen



**Abbildung 4.1:** Massenspektrum des Teilcheninhaltes des MSSM für den Benchmark-Punkt SPS1a, berechnet von SPHENO 3.0 (beta). Die Abweichungen von dem ISAJET-Standard sind nur geringfügig. Das Gluino ist das schwerste supersymmetrische Teilchen, das Neutralino  $\tilde{\chi}_1^0$  ist das LSP.

Teilchenname	Masse (GeV)	Teilchenname	Masse (GeV)
$h^0$	110.29	$\tilde{e}_L$	202.57
$H^0$	399.51	$\tilde{e}_R$	144.09
$A^0$	399.12	$\tilde{\nu}_e$	186.35
$H^\pm$	407.58	$\tilde{\mu}_L$	202.58
$\tilde{d}_L$	574.05	$\tilde{\mu}_R$	144.06
$\tilde{d}_R$	551.10	$\tilde{\nu}_\mu$	186.34
$\tilde{u}_L$	568.65	$\tilde{\tau}_1$	134.49
$\tilde{u}_R$	551.38	$\tilde{\tau}_2$	206.59
$\tilde{s}_L$	574.05	$\tilde{\nu}_\tau$	185.41
$\tilde{s}_R$	551.09	$\tilde{g}$	607.53
$\tilde{c}_L$	568.66	$\tilde{\chi}_1^0$	97.15
$\tilde{c}_R$	551.37	$\tilde{\chi}_2^0$	180.98
$\tilde{b}_1$	517.57	$\tilde{\chi}_3^0$	365.22
$\tilde{b}_2$	550.81	$\tilde{\chi}_4^0$	382.50
$\tilde{t}_1$	401.17	$\tilde{\chi}_1^\pm$	180.58
$\tilde{t}_2$	590.66	$\tilde{\chi}_2^\pm$	383.52

**Tabelle 4.1:** Massen aller supersymmetrischen Teilchen für den Benchmark-Punkt SPS1a. Die Berechnung erfolgte durch SPheno 3.0 (beta), ausgehend von den Werten der mSUGRA-Parameter auf der GUT-Skala:  $M_0 = 100$  GeV,  $M_{1/2} = 250$  GeV,  $\tan\beta = 10$ ,  $A_0 = -100$  GeV,  $\text{sign}\mu = 1$ .

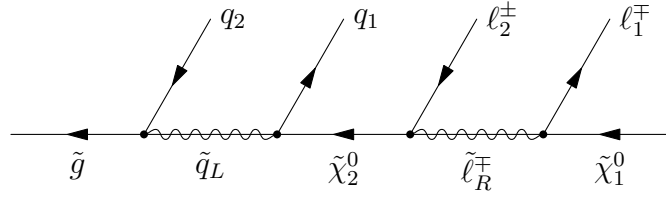
(LSP, für lightest supersymmetric particle) endet, weil dieses, wieder aufgrund der R-Parität, nicht ausschließlich in Standardmodell-Teilchen zerfallen kann.

In SPS1a ist das leichteste supersymmetrische Teilchen das ungeladene Neutralino  $\tilde{\chi}_1^0$ , welches nur schwach wechselwirkt, also keine Spur im Detektor hinterlässt und eine direkte Energie- und Impulsmessung daher nicht möglich ist. Ein solcher Prozess macht sich daher durch das Fehlen eines geraumen Betrages in der Bilanz der transversalen Energie bemerkbar (häufig auch als  $\cancel{E}_T$  bezeichnet). Das Neutralino  $\tilde{\chi}_1^0$  ist somit ein vielversprechender Kandidat für kalte dunkle Materie. Da aber immer jeweils zwei Neutralinos (eines pro Kaskade) dem Detektor unerkannt entkommt, lässt sich der Endzustand des Ereignisses bzw. die invariante Masse nicht eindeutig rekonstruieren. Diese Schwierigkeit wird umgangen, indem man die Verteilungen der invarianten Massen aus verschiedenen Kombinationen der sichtbaren Zerfallsprodukte betrachtet. Aus dem Vergleich der charakteristischen Form der Verteilungen mit theoretischen Rechnungen kann indirekt auf die Massen der beteiligten Partikel geschlossen werden. Eine besondere Bedeutung kommt dabei den Schwellen- bzw. Endpunkten der Verteilungen zu, die sich aus der speziellen Kinematik der Reaktion ergeben. Wenn man nun in der Lage ist, genau so viele dieser kinematischen Kanten zu messen, können die Massen ohne Ambivalenzen daraus abgeleitet werden.

Die hier vorgestellte Studie (aus [26]) betrachtet den Zerfall

$$\tilde{g} \rightarrow q\tilde{q}_L \rightarrow qq\tilde{\chi}_2^0 \rightarrow qq\ell_2^\pm\tilde{\ell}_R^\mp \rightarrow qq\ell_2^\pm\ell_1^\mp\tilde{\chi}_1^0 \quad (4.3)$$

des Gluinos mit genau zwei entgegengesetzt geladenen Leptonen im Endzustand (siehe auch Abbildung 4.2 für das zugehörige Feynman-Diagramm). Diese Kette bildet zugleich den Ausgangspunkt



**Abbildung 4.2:** Feynman-Diagramm des Gluino-Zerfalls. Der Endzustand paarweise produzierter Gluinos lässt sich aufgrund der beiden nicht direkt im Detektor nachweisbaren Neutralinos  $\tilde{\chi}_1^0$  nicht vollständig rekonstruieren. Aus den Schwellen- und Endpunkten der charakteristischen Invariante-Masse-Verteilungen von Teilmengen der sichtbaren Endzustände kann jedoch auf die Massen der involvierten Teilchen geschlossen werden.

für eine Vielzahl weiterer Analysen, die in weiter unten liegenden Abschnitten beschrieben werden. Obwohl das Stau  $\tilde{\tau}_1$ , wie in allen Modellen mit moderatem  $\tan\beta$ , den größeren  $\tau_L$ -Anteil hat, und somit den Hauptanteil des Zweiges  $\tilde{\chi}_2^0 \rightarrow \ell\tilde{\ell}_R$  des Wino-artigen  $\tilde{\chi}_2^0$  ausmacht, beschränkt man sich dort auf Selektoren bzw. Smyonen, da die entstehenden Elektronen und Myonen eine übersichtliche Signatur im Detektor aufweisen und deren Energie sich sehr genau messen lässt. Die aus dem Stau entstehenden Taus zerfallen zum großen Teil in (mehrere) Hadronen und Neutrinos und sind daher experimentell wesentlich anspruchsvoller handhabbar.

Das Gluino zerfällt zunächst in ein Quark und ein Squark  $\tilde{q}_L$ . Die Bino-artigkeit des Neutralinos  $\tilde{\chi}_1^0$  und die Wino-artigkeit des Neutralinos  $\tilde{\chi}_2^0$  in SPS1a hat zur Folge, dass ein Squark  $\tilde{q}_R$  mit hoher Wahrscheinlichkeit sofort in das LSP übergehen würde. Dieser Fall wird in Abschnitt 4.9 weiter unten näher behandelt. Das  $\tilde{q}_L$ , welches ein  $\tilde{u}_L$  ( $\tilde{c}_L$ ),  $\tilde{d}_L$  ( $\tilde{s}_L$ ),  $\tilde{b}_1$  oder  $\tilde{b}_2$  sein kann (zu Ketten mit Beteiligung des Stops  $\tilde{t}_1$  siehe Abschnitt 4.10, das Stop  $\tilde{t}_2$  ist in SPS1a kinematisch nicht erlaubt), zerfällt nun seinerseits in sein entsprechendes Partnerquark und in ein Neutralino  $\tilde{\chi}_2^0$  und dieses über ein Slepton  $\tilde{\ell}_R$  in die beiden Leptonen und das LSP. Da das up-Squark und das Down-Squark darüber hinaus sehr ähnliche Massen haben (vergleiche auch Tabelle 4.1) und daher experimentell nicht unterscheidbar sind, werden beide im Rahmen der Analyse als ein einziges Objekt  $\tilde{q}$  aufgefasst.

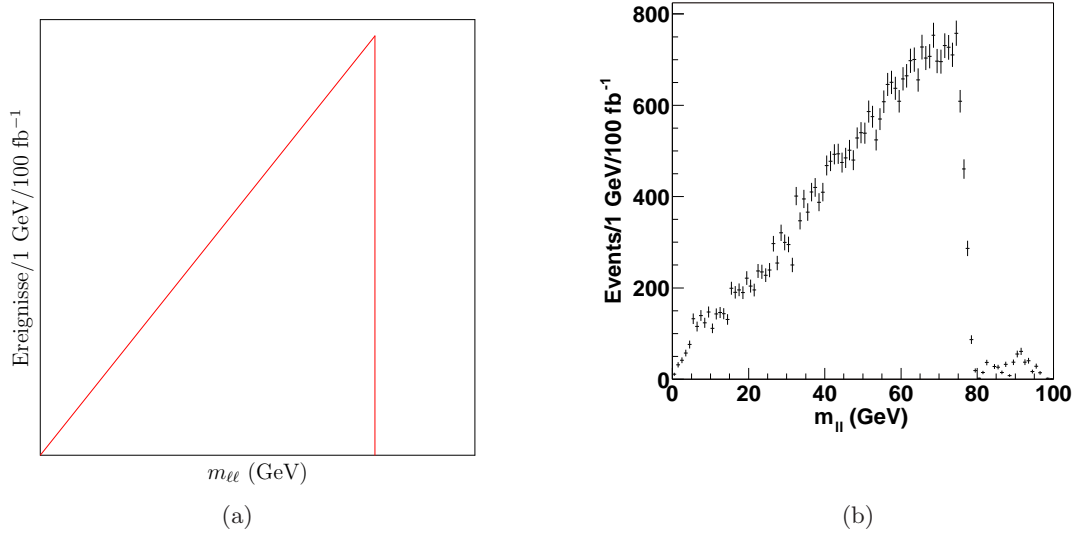
Bildet man nun aus verschiedenen Untermengen des sichtbaren Endzustandes die invariante Masse, so ergeben sich charakteristischen Verteilungen, deren End- und Schwellenpunkte durch die

folgenden Formeln gegeben sind [10]:

$$\begin{aligned}
(m_{\ell\ell}^{\max})^2 &= \frac{(m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 - m_{\tilde{\ell}_R}^2)(m_{\tilde{\ell}_R}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)}{m_{\tilde{\ell}_R}^2} \\
(m_{q\ell\ell}^{\max})^2 &= \begin{cases} \frac{(m_{\tilde{q}_L}^2 - m_{\tilde{\chi}_2^0}^2)(m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)}{m_{\tilde{\chi}_2^0}^2} & \text{für } \frac{m_{\tilde{q}_L}}{m_{\tilde{\chi}_2^0}} > \frac{m_{\tilde{\chi}_2^0}}{m_{\tilde{\ell}_R}} \frac{m_{\tilde{\ell}_R}}{m_{\tilde{\chi}_1^0}} \\ \frac{(m_{\tilde{q}_L}^2 m_{\tilde{\ell}_R}^2 - m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)(m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 - m_{\tilde{\ell}_R}^2)}{m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 m_{\tilde{\ell}_R}^2} & \text{für } \frac{m_{\tilde{\chi}_2^0}}{m_{\tilde{\ell}_R}} > \frac{m_{\tilde{\ell}_R}}{m_{\tilde{q}_L}} \frac{m_{\tilde{\chi}_1^0}}{m_{\tilde{\chi}_2^0}} \\ \frac{(m_{\tilde{q}_L}^2 - m_{\tilde{\ell}_R}^2)(m_{\tilde{\ell}_R}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)}{m_{\tilde{\ell}_R}^2} & \text{für } \frac{m_{\tilde{q}_L}}{m_{\tilde{\chi}_1^0}} > \frac{m_{\tilde{\ell}_R}}{m_{\tilde{\chi}_1^0}} \frac{m_{\tilde{\chi}_2^0}}{m_{\tilde{\ell}_R}} \\ (m_{\tilde{q}_L} - m_{\tilde{\chi}_1^0})^2 & \text{sonst} \end{cases} \\
(m_{q\ell}^{\text{low}}, m_{q\ell}^{\text{high}}) &= \begin{cases} (m_{q\ell_n}, m_{q\ell_f}) & \text{für } 2m_{\tilde{\ell}_R}^2 > m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 + m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 > 2m_{\tilde{\chi}_1^0} m_{\tilde{\chi}_2^0} \\ (m_{q\ell(eq)}, m_{q\ell_f}) & \text{für } m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 + m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 > 2m_{\tilde{\ell}_R}^2 > 2m_{\tilde{\chi}_1^0} m_{\tilde{\chi}_2^0} \\ (m_{q\ell(eq)}, m_{q\ell_n}) & \text{für } m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 + m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 > 2m_{\tilde{\chi}_1^0} m_{\tilde{\chi}_2^0} \\ > 2m_{\tilde{\ell}_R}^2 \end{cases} \\
(m_{q\ell_n})^2 &= \frac{(m_{\tilde{q}_L}^2 - m_{\tilde{\chi}_2^0}^2)(m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 - m_{\tilde{\ell}_R}^2)}{m_{\tilde{\chi}_2^0}^2} \\
(m_{q\ell_f})^2 &= \frac{(m_{\tilde{q}_L}^2 - m_{\tilde{\chi}_2^0}^2)(m_{\tilde{\ell}_R}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)}{m_{\tilde{\ell}_R}^2} \\
(m_{q\ell(eq)})^2 &= \frac{(m_{\tilde{q}_L}^2 - m_{\tilde{\chi}_2^0}^2)(m_{\tilde{\ell}_R}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)}{2m_{\tilde{\ell}_R}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2} \\
(m_{q\ell\ell}^{\min})^2 &= \left[ (m_{\tilde{q}_L}^2 - m_{\tilde{\chi}_2^0}^2)(m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 - m_{\tilde{\ell}_R}^2)(m_{\tilde{\ell}_R}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2) \right. \\
&\quad \left. - (m_{\tilde{q}_L}^2 - m_{\tilde{\chi}_2^0}^2) \sqrt{(m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 - m_{\tilde{\ell}_R}^2)(m_{\tilde{\ell}_R}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)} - 16m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 m_{\tilde{\ell}_R}^4 m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2m_{\tilde{\ell}_R}^2 (m_{\tilde{q}_L}^2 - m_{\tilde{\chi}_2^0}^2)(m_{\tilde{\chi}_2^0}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2) \right] / (4m_{\tilde{\ell}_R}^2 m_{\tilde{\chi}_2^0}^2)
\end{aligned}$$

So bezeichnet beispielsweise  $m_{\ell\ell}^{\max}$  den Endpunkt in der Invariante-Masse-Verteilung der beiden Leptonen. Der Ausdruck  $m_{q\ell}^{\text{high}}$  steht für die Kante in der Verteilung mit dem Lepton mit der größeren Energie (die Indizes  $n$  bzw.  $f$  sind in diesem Zusammenhang Abkürzungen für das „near“- bzw. „far“-Lepton (aus dem  $\tilde{\chi}_2^0$  bzw. aus dem  $\tilde{\ell}_R$  stammend)). Desweiteren ist mit  $m_{q\ell\ell}^{\min}$  die Schwelle in der Untermenge der  $m_{q\ell\ell}$ -Verteilung gemeint, bei der der Winkel zwischen den beiden Leptonen größer als  $\pi/2$  ist.

Um nun die invarianten Massen zu extrahieren, wurden SUSY-Ereignisse mit PHYTHIA 6.2 [33]



**Abbildung 4.3:** Theoretische (a) und aus Simulationen gewonnene (b) Verteilung des Invariante-Masse-Spektrums (Abbildung aus [26]) der beiden Leptonen aus dem Zerfall des Gluinos. Die Daten nach Schnitten spiegeln die charakteristische Dreiecksverteilung der Vorhersage überzeugend wieder. Der Endpunkt kann nun durch den Fit einer halben Gauß-Verteilung an die Kante der Dreiecksform bestimmt werden.

generiert und die Detektorantwort mit ATLFEST [3] simuliert. Die in der Studie angewendeten Schnitte sind:

1. Mindestens vier Jets, davon soll für die drei energiereichsten gelten:  $p_{T,1} > 150$  GeV,  $p_{T,2} > 100$  GeV,  $p_{T,3} > 50$  GeV
2.  $M_{\text{eff}} = \cancel{E}_T + p_{T,1} + p_{T,2} + p_{T,3} + p_{T,4} > 600$  GeV
3.  $\cancel{E}_T = \max(100 \text{ GeV}, 0.2 M_{\text{eff}})$
4. Zwei isolierte, gleichartige Leptonen (keine  $\tau$ ) mit entgegengesetztem Vorzeichen (OSSF, Opposite Sign Same Flavour), die  $p_T(\ell) > 20$  GeV,  $p_T(\ell) > 10$  GeV erfüllen

Die beiden OSSF-Leptonen sind über die Erhaltung der elektrischen Ladung korreliert. Die nach den Schnitten verbliebenen Ereignisse müssen daher um den Untergrund an entgegengesetzt geladenen Leptonen, die unabhängig voneinander produziert wurden, bereinigt werden. Dazu geht man von der Annahme aus, dass die Menge aller Ereignisse mit unabhängigen, aber gleichnamig geladenen Leptonen der gleichen Verteilung folgen wie der fragliche Untergrundprozess. Diese Verteilung kann dann separat bestimmt und abgezogen werden.

Die zitierte Studie hat ihre Ergebnisse mit einer Anzahl an Ereignissen erhalten, die einer integrierten Luminosität von  $100 \text{ fb}^{-1}$  entspricht. Die statistischen Unsicherheiten aller in dieser Studie untersuchten Kanten sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst.

Kinematische Kante	Statistischer Fehler (GeV)
$m_{\ell\ell}^{\max}$	0.05
$m_{q\ell\ell}^{\max}$	2.4
$m_{q\ell}^{\text{low}}$	1.5
$m_{q\ell}^{\text{high}}$	1.8
$m_{q\ell\ell}^{\min}$	2.8
$m_{b\ell\ell}^{\min}$	6.3

**Tabelle 4.2:** Statistische Unsicherheiten aller in diesem Abschnitt beschriebenen kinematischen Kanten für  $100 \text{ fb}^{-1}$ .

#### 4.1.2 Die Masse des Gluinos

Die Masse des Gluinos wird in der zugrundeliegenden Studie [26] über die Messung der invarianten Masse seiner Zerfallsprodukte bestimmt. Das Gluino zerfällt z. B. in der in Abbildung 4.2 gezeigten Zerfallskette zunächst in ein Quark und ein Squark ( $\tilde{g} \rightarrow q\tilde{q}$ ), wobei letztes seinerseits in ein Quark und ein Neutralino ( $\tilde{q} \rightarrow q\tilde{\chi}_2^0$ ) zerfällt. Unter den kinematisch möglichen Zerfällen in Quarks wurde hier der Zerfall in bottom-Quarks ausgewählt, für welche aufgrund ihrer langen Lebensdauer und großen Masse besondere Nachweismöglichkeiten (Bestimmung von Sekundärverizes, Soft-Leptonen-Tag) gegeben sind. Neben den im vorigen Abschnitt angegebenen Schnitten fordert man:

- die invariante Masse des OSSF-Leptonenpaares soll größer als 65 GeV und kleiner als  $m_{\ell\ell}^{\max}$  sein
- genau zwei identifizierte bottom-Jets, wobei einer zu den zwei energiereichsten gehören und der andere einen Transversalimpuls  $p_T > 50 \text{ GeV}$  haben soll

Der (Dreier-)Impuls  $\mathbf{p}(\tilde{\chi}_2^0)$  des  $\tilde{\chi}_2^0$  kann für den betrachteten Punkt durch den Ausdruck

$$\mathbf{p}(\tilde{\chi}_2^0) = \left(1 - \frac{m(\tilde{\chi}_1^0)}{m(\ell\ell)}\right) \mathbf{p}(\ell\ell) \quad (4.4)$$

angenähert werden, wobei  $m(\tilde{\chi}_1^0)$  die als mit hinreichender Genauigkeit bekannt vorausgesetzte Masse des  $\tilde{\chi}_1^0$ ,  $m(\ell\ell)$  die invariante Masse der beiden Leptonen und  $\mathbf{p}(\ell\ell)$  die Summe des Dreier-Impulses der Leptonen ist [6]. Zusammen mit der Masse des  $\tilde{\chi}_2^0$  folgt die Masse des Gluinos aus der Messung des gaußförmigen Invariante-Masse-Spektrums ( $\tilde{\chi}_2^0 b\bar{b}$ ), welches in Abbildung 4.4 für  $300 \text{ fb}^{-1}$  zu sehen ist.

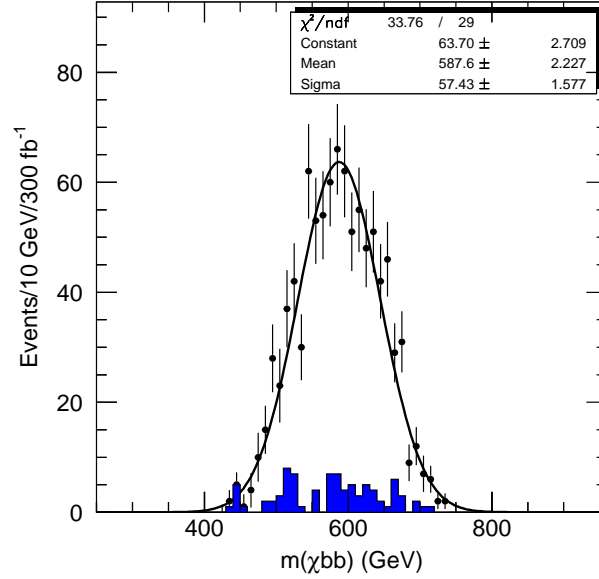
Die statistische Unsicherheit auf den Mittelwert dieser Verteilung wird mit 2.5 GeV angegeben und ein systematischer Fehler von 10 GeV abgeschätzt. Die Gluino-Masse lässt sich somit auf  $\pm 2.5 \pm 10 \text{ GeV}$  bei  $300 \text{ fb}^{-1}$  bestimmen.

Es zeigt sich, dass die Korrelation zwischen der gemessenen Gluinomasse und der Masse des Neutralinos  $\tilde{\chi}_1^0$  durch einen linearen Zusammenhang parametrisiert werden kann:

$$m(\tilde{g}) = 500 \text{ GeV} + 0.988 \times m(\tilde{\chi}_1^0) [\text{GeV}]. \quad (4.5)$$

Die eigentliche Observable ist daher durch die Differenz  $m(\tilde{g}) - m(\tilde{\chi}_1^0)$  gegeben.





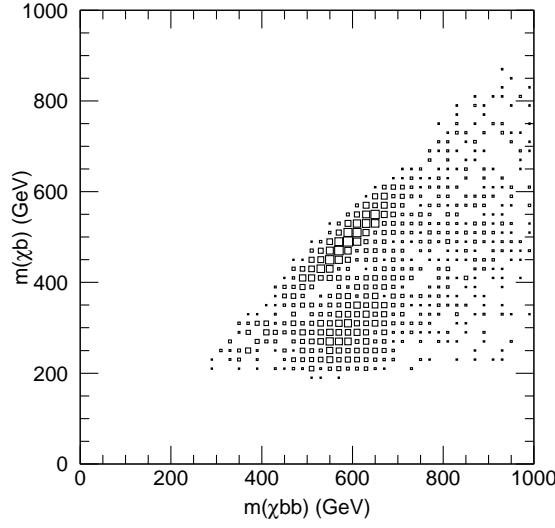
**Abbildung 4.4:** Verteilung der invarianten Masse  $m(\tilde{\chi}_2^0 bb)$  für eine integrierte Luminosität von  $300 \text{ fb}^{-1}$  nach allen Schnitten. In blau ist der verbleibende Anteil des SUSY-Untergrundes dargestellt. Der Zentralwert der an die Datenpunkte angepassten Gauß-Funktion gibt die gemessene Masse des Gluinos an, die Standardabweichung den Fehler auf die Messung (Abbildung aus [26]).

#### 4.1.3 Die Masse des Sbottom-Quark

Die Selektion eines Satzes von Ereignissen, welche einen Gluinozerfall in zwei bottom-Quarks wie in Abbildung 4.2 enthalten, lässt sich auch zur Messung der Differenz zwischen der Gluino- und der Sbottom-Masse nutzen [26]. Die Gluino-Masse ergibt sich, wie im vorherigen Abschnitt gesehen, aus der invarianten Masse  $m(\tilde{\chi}_2^0 bb)$  und die Sbottom-Masse entsprechend aus  $m(\tilde{\chi}_2^0 b)$ , wobei das bottom-Quark aus dem Zerfall des Sbottoms stammt. Für die Messung ist also die richtige Zuordnung dieses Quarks zur Bestimmung der invarianten Masse entscheidend. Zu diesem Zweck trägt man die invariante Masse aus beiden Kombinationen von bottom-Quarks und  $\tilde{\chi}_2^0$  gegen  $m(\tilde{\chi}_2^0 bb)$  auf (siehe Abbildung 4.5).

Wie unschwer zu erkennen ist, bilden sich zwei deutlich voneinander abgegrenzte Gebiete heraus. Die richtig kombinierten invarianten Massen liegen in einem ellipsenförmigen Bereich um die Bild-diagonale, während die falschen Kombinationen zu kleineren invarianten Massen  $m(\tilde{\chi}_2^0 b)$  unterhalb der Diagonale führen. Dies ist dadurch zu erklären, dass das bottom-Quark aus dem Zerfall  $\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}b$  nur wenig Phasenraum zur Verfügung hat, da das Sbottom-Quark fast genauso schwer ist wie das Gluino. Die interessierende Region wird daher mit den zusätzlichen Schnitten

- $380 \text{ GeV} < m(\tilde{\chi}_2^0 b) < 600 \text{ GeV}$
- $m(\tilde{\chi}_2^0 bb) - m(\tilde{\chi}_2^0 b) > 150 \text{ GeV}$



**Abbildung 4.5:** Streudiagramm der Verteilung der invarianten Masse  $\tilde{\chi}_2^0 bb$  aufgetragen gegen  $\tilde{\chi}_2^0 b$  nach Schnitten. Es sind zwei qualitativ verschiedene Bereiche auszumachen, wobei die Einträge entlang der Bilddiagonalen die richtige Kombination von bottom-Quarks repräsentiert. Diese invarianten Massen werden mit einem zusätzlichen Schnitt  $380 \text{ GeV} < m(\tilde{\chi}_2^0 b) < 600 \text{ GeV}$  ausgewählt (Abbildung aus [26]).

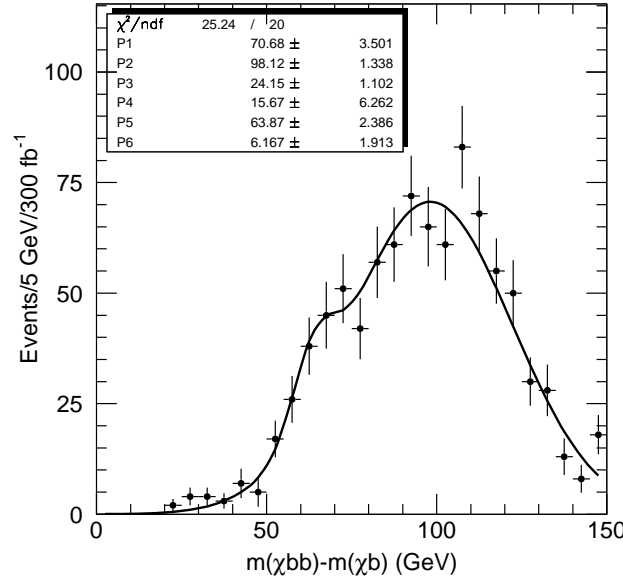
ausgewählt. Wie schon gesagt hängt die Messung sowohl der Sbottom- als auch der Gluinomasse von der bekannt vorausgesetzten  $\tilde{\chi}_2^0$ -Masse ab. Dieser Zusammenhang stellt sich als linear heraus, und kann durch Betrachtung der Größe  $m(\tilde{\chi}_2^0 bb) - m(\tilde{\chi}_2^0 b) >$  aufgelöst werden, deren Verteilung in Abbildung 4.6 für  $300 \text{ fb}^{-1}$  gezeigt ist.

Da das Gluino in beide Sbottom-Quark-Typen  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_2$  zerfällt, erwartet man die Ausbildung von zwei überlagerten Maxima um die jeweiligen Sbottom-Massen. In der Studie wird daher eine Kombination aus zwei Gauß-Funktionen an die Messpunkte angepasst. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass der Nachweis des doppelten Maximums in echten Daten eines genaueren Verständnisses der Rekonstruktion von b-Jets durch den Detektor erfordert. Der statistische Fehler auf die Messung wird mit  $\pm 1.5 \text{ GeV}$  für das  $\tilde{b}_1$  und  $\pm 2.5 \text{ GeV}$  für das  $\tilde{b}_2$  angegeben. Bei einer geringeren Statistik von bis zu  $100 \text{ fb}^{-1}$  ist eine Auflösung der beiden Maxima sehr wahrscheinlich nicht möglich. Der Schwerpunkt der Verteilung stellt daher eine Messung des mit den Verzweigungsverhältnissen gewichteten Mittelpunkts der beiden Sbottom-Massen dar:

$$\frac{m(\tilde{b}_1) \times \text{BR}(\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1 b) \times \text{BR}(\tilde{b}_1 \rightarrow \tilde{\chi}_2^0) + m(\tilde{b}_2) \times \text{BR}(\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_2 b) \times \text{BR}(\tilde{b}_2 \rightarrow \tilde{\chi}_2^0)}{\text{BR}(\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1 b) \times \text{BR}(\tilde{b}_1 \rightarrow \tilde{\chi}_2^0) + \text{BR}(\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_2 b) \times \text{BR}(\tilde{b}_2 \rightarrow \tilde{\chi}_2^0)} \quad (4.6)$$

Die Größe soll im Folgenden durch  $\langle m_{\tilde{g}} - m_{\tilde{b}_{1,2}} \rangle$  abgekürzt werden. Für  $100 \text{ fb}^{-1}$  ist der statistische Fehler  $1.7 \text{ GeV}$ .

Unter der Voraussetzung eines zuverlässigen Modells der Detektorantwort auf b-Jets, kann darüber hinaus eine Bestimmung der relativen Häufigkeiten der Zerfälle in  $\tilde{b}_1$ - und  $\tilde{b}_2$ -Squarks, d. h. des



**Abbildung 4.6:** Verteilung der invarianten Masse  $m(\chi_2^0 bb) - m(\chi_2^0 b)$  nach allen Schnitten für 300  $\text{fb}^{-1}$  (Abbildung aus [26]).

Verhältnisses

$$\frac{\text{BR}(\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_2 b) \times \text{BR}(\tilde{b}_2 \rightarrow \tilde{\chi}_2^0 b)}{\text{BR}(\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1 b) \times \text{BR}(\tilde{b}_1 \rightarrow \tilde{\chi}_2^0 b)} \quad (4.7)$$

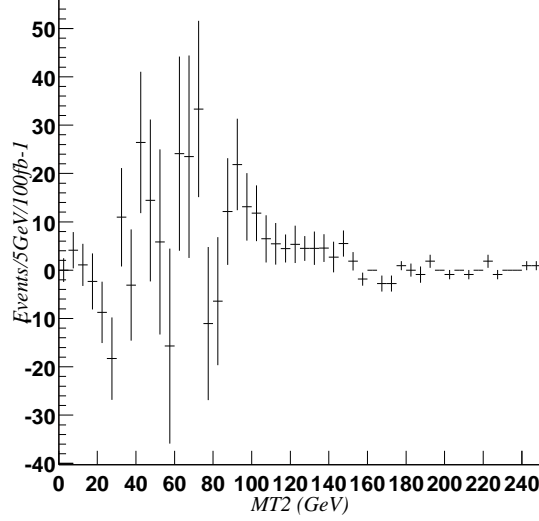
in einem Datensatz erfolgen. Dies geschieht durch die Anpassung des Modells an die Daten in einem Likelihood-Fit. Eine Abschätzung des statistischen Fehler auf diese Observable ist mit  $\pm 0.078$  für 300  $\text{fb}^{-1}$  angegeben.

#### 4.1.4 Die Masse des Slepton $\tilde{\ell}_L$

Sleptonen können am LHC direkt durch den Austausch eines virtuellen  $Z^*$  oder  $\gamma^*$  im s-Kanal erzeugt werden. Für die Bestimmung der Masse selektiert man nun Ereignisse, bei denen das Slepton in das entsprechende Lepton und ein Neutralino  $\tilde{\chi}_1^0$  zerfällt [29]. Während dem Slepton  $\tilde{\ell}_R$  ausschließlich dieser Kanal zur Verfügung steht, beträgt das Verzweigungsverhältnis im Falle des Slepions  $\tilde{\ell}_L$  nur ungefähr 50%. Der Endzustand zeichnet sich also durch zwei entgegengesetzt geladene Leptonen mit gleichem Flavour (OSSF) und fehlender transversaler Energie  $\cancel{E}_T$  aufgrund der nicht nachgewiesenen Neutralinos aus. Wieder ist eine direkte Massenrekonstruktion nicht durchführbar. Stattdessen kann in dieser Situation aber die sogenannte Cambridge- $M_{T2}$ -Variable, gegeben durch

$$M_{T2}^2 = \min_{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_T} [\max\{m_T^2(p_T^{\ell_1}, \vec{p}_1), m_T^2(p_T^{\ell_2}, \vec{p}_2)\}] \quad (4.8)$$

gemessen werden, wobei  $\cancel{p}_1$  und  $\cancel{p}_2$  die (fehlenden) Impulse der Neutralinos sind. Der statistische Fehler wird aus der Anpassung einer Gauß-Funktion an den Endpunkt der Verteilung mit einem statistischen Fehler von 2.8 GeV für  $100 \text{ fb}^{-1}$  erhalten.



**Abbildung 4.7:** Die Cambridge- $MT_2$ -Variable nach allen Schnitten. Der Endpunkt der Verteilung ist ein Maß für die Differenz  $m_{\tilde{\ell}_L} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$  (Abbildung aus [26]).

#### 4.1.5 Kinematische Kanten mit schweren Gauginos

Die Analyse [40] der seltenen Zerfälle von Squarks  $\tilde{q}_L$  in schwere Gauginos (in SPS1a sind hiermit die Neutralinos  $\tilde{\chi}_4^0$  und  $\tilde{\chi}_3^0$ , sowie das Chargino  $\tilde{\chi}_2^\pm$  gemeint, vergleiche auch mit Abbildung 4.1) ist Gegenstand des folgenden Abschnittes. Da die Übergangswahrscheinlichkeit des  $\tilde{q}_L$  in ein  $\tilde{\chi}_4^0$  oder  $\tilde{\chi}_2^\pm$  jeweils typischerweise bei  $\sim 1\%$  liegt, während das Verzweungsverhältnis zu einem Neutralino  $\tilde{\chi}_3^0$  etwa eine Größenordnung geringer ist (und daher hier nicht länger betrachtet wird), kann die Untersuchung nur bei relativ hoher Statistik durchgeführt werden. Dazu selektiert man Ereignisse, welche einen der Zerfälle

$$\tilde{q}_L \rightarrow q\tilde{\chi}_4^0 \rightarrow q\ell_2^\mp \tilde{\ell}_R^\pm \rightarrow q\ell_2^\mp \ell_1^\pm \tilde{\chi}_1^0 \quad [D1]$$

$$\tilde{q}_L \rightarrow q\tilde{\chi}_4^0 \rightarrow q\ell_2^\mp \tilde{\ell}_L^\pm \rightarrow q\ell_2^\mp \ell_1^\pm \tilde{\chi}_1^0 \quad [D2]$$

$$\tilde{q}_L \rightarrow q\tilde{\chi}_4^0 \rightarrow q\ell_2^\mp \tilde{\ell}_L^\pm \rightarrow q\ell_2^\mp \ell_1^\pm \tilde{\chi}_2^0 \quad [D3]$$

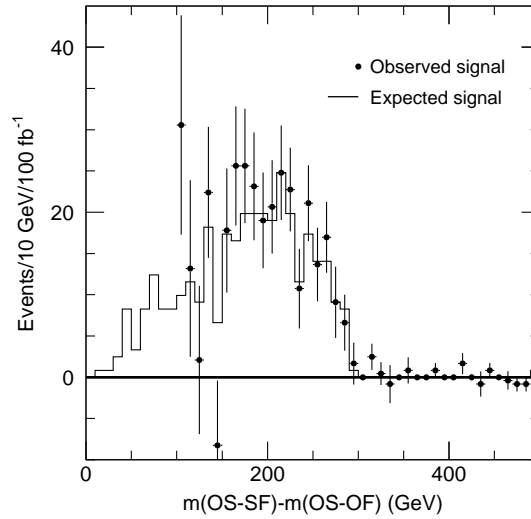
$$\tilde{q}_L \rightarrow q'\tilde{\chi}_2^\pm \rightarrow q'\ell_2^\pm \tilde{\nu}_\ell \rightarrow q'\ell_2^\pm \ell_1^\mp \tilde{\chi}_1^\pm \quad [D4]$$

enthalten. Unter der Annahme, dass das Neutralino  $\tilde{\chi}_2^0$  in D3 und das Chargino  $\tilde{\chi}_1^\pm$  in D4 in Staus  $\tilde{\tau}_1$ , bzw. insbesondere in hadronisch zerfallene Taus übergeht, befinden sich genau zwei charakteristische OSSF-Leptonen im Endzustand. Ähnlich wie in 4.1.1 lässt sich nun die invarianten Masse der beiden Leptonen in ein Histogramm eintragen (Abbildung 4.8), nur dass die resultierende Verteilung eine Überlagerung der Beiträge aus den oben genannten vier Zerfällen ist. Der

Endpunkt der Gesamtverteilung ist also im Wesentlichen durch diejenige Unterverteilung gegeben, deren Endpunkt bei der höchsten invarianten Masse liegt. Diese wird hier von den Leptonen aus dem Zerfall  $D2$  gebildet, wie sich leicht durch Einsetzen der entsprechenden Massen in Formel 4.4 zeigen lässt. Dies bedeutet, dass der Endpunkt sensitiv auf die Masse des Neutralino  $\tilde{\chi}_4^0$  ist. Um den Standardmodelluntergrund gering zu halten wird gefordert:

- Genau zwei isolierte OSSF-Leptonen mit  $p_{T,1} > 20$  GeV,  $p_{T,2} > 10$  GeV
- $\cancel{p}_T > 100$  GeV, mindestens vier Jets mit  $p_{T,j1} > 150$  GeV,  $p_{T,j2} > 100$  GeV,  $M_{\text{eff}} > 600$  GeV
- $M_{T2} > 80$  GeV
- $m_{\ell+\ell^-} > 100$  GeV

Der letzte Schnitt diskriminiert hierbei Leptonen aus dem Zerfall des Neutralino  $\tilde{\chi}_2^0$ . Wie üblich wird eine den OSOF-Leptonen entsprechende Verteilung abgezogen, um unabhängig voneinander produzierte OSSF-Leptonen zu unterdrücken. Man erwartet, den Endpunkt der Verteilung für  $100 \text{ fb}^{-1}$  auf 4 GeV genau messen zu können.



**Abbildung 4.8:** Überlagerung der Invariante-Masse-Verteilung der beiden Leptonen aus dem Zerfall schwerer Neutralinos nach allen Schnitten. Der Endpunkt ist durch die Unterverteilung aus dem Zerfall  $D2$  (siehe Text) gegeben und somit sensitiv auf die Masse des Neutralino  $\tilde{\chi}_4^0$  (Abbildung aus [26]).

#### 4.1.6 Die Masse des Squarks $\tilde{q}_R$

Das Squark  $\tilde{q}_R$  (gemeint sind, wie oben, nur Squarks aus den ersten beiden Generationen) zerfällt zu fast 100% in ein entsprechendes Quark und ein Neutralino  $\tilde{\chi}_1^0$ . Dies ist dadurch zu erklären, dass

für den Parameterpunkt SPS1a das Neutralino  $\tilde{\chi}_1^0$  im Wesentlichen ein Bino und das Neuralino  $\tilde{\chi}_2^0$  nahezu ein Wino ist. Ein Squark trägt keinen schwachen Isospin und koppelt daher ausschließlich an den Bino-Anteil eines Neutralino, hier also vornehmlich an das  $\tilde{\chi}_1^0$ . Da die Squarks zum großen Teil durch den Zerfall des Gluinos produziert werden, ist ein solches Ereignis gekennzeichnet durch einen Jet mit geringem transversalen Impuls (aus dem Übergang  $\tilde{g} \rightarrow q\tilde{q}_R$ , weil  $m_{\tilde{g}} \approx m_{\tilde{q}_R}$ ) und einem hochenergetischen Jet aus dem Zerfall des Squarks. In dieser Studie [26] interessiert man sich für Ereignisse, bei denen beide Gluinos in Squarks  $\tilde{q}_R$  zerfallen. Selektiert wird durch:

- $\cancel{E}_T > \max(100 \text{ GeV}, 0.2 \times M_{\text{eff}})$
- $M_{\text{eff}} > 500 \text{ GeV}$
- Transversaler Impuls des führenden Jets  $p_T > 300 \text{ GeV}$
- Höchstens vier Jets mit  $p_T > 50 \text{ GeV}$
- Keine Leptonen,  $\tau$ -Jets, b-Jets

Die beiden letztgenannten Schnitte reduzieren den Untergrund durch den Zerfall des Squarks  $\tilde{q}_L$  und durch Squarks der dritten Generation. Auch in dieser Situation erweist sich die Cambridge-Variable  $M_{T2}$ , angewendet auf die beiden führenden Jets, als hervorragend geeignet, den Endzustand zu charakterisieren. Abbildung 4.9 zeigt die Verteilung von  $M_{T2}$  nach Erfüllung aller Schnittkriterien. Die Position der deutlich sichtbaren Kante ist ein Maß für die Differenz  $m_{\tilde{q}_R} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$ . Genauere Untersuchungen zeigen darüber hinaus, dass auch bei einem wesentlich stärker vorhandenen Standardmodelluntergrund die gute Messbarkeit der Kante bestehen bleibt. Eine aus einem idealen Datensatz der gewünschten Zerfälle gewonnene Parametrisierung der  $M_{T2}$ -Verteilung wird an den Kantenverlauf angepasst und der statistische Fehler auf die Position des Endpunktes wird mit  $\pm 3.6 \text{ GeV}$  für eine integrierte Luminosität von  $30 \text{ fb}^{-1}$  angegeben. Es stellt sich allerdings heraus, dass sich der Wert des auf diese Weise bestimmten Endpunktes um etwa  $10 \text{ GeV}$  von dem berechneten unterscheidet. Diese Abweichung kann als Abschätzung des systematischer Fehler auf die Messung angesehen werden.

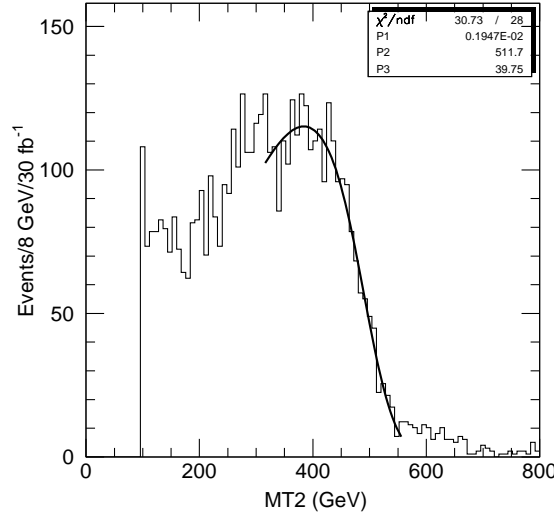
#### 4.1.7 Messungen im Stop-Sektor

In diesem Abschnitt sollen die Messungen der invarianten Masse  $m_{tb}$  des top- und bottom-Quarks aus den für mSUGRA dominanten Zerfällen

$$\begin{aligned} \text{(III)}_j &= \tilde{g} \rightarrow t\tilde{t}_1 \rightarrow t b \tilde{\chi}_j^\pm \\ \text{(IV)}_{ij} &= \tilde{g} \rightarrow b\tilde{b}_i \rightarrow t b \tilde{\chi}_j^\pm \end{aligned}$$

des Gluinos behandelt werden (nach [26]). Hierbei wird sich auf die hadronischen Zerfälle des top-Quarks konzentriert, da diese eine gut erkennbare Kante im Spektrum erzeugen. Zur Separation der Ereignisse fordert man neben den SUSY-Standardschnitten:

- genau zwei b-Jets
- Paare von Jets, die konsistent mit dem hadronischen Zerfall des W-Bosons (aus dem top-Zerfall) sind:  $|m_{jj} - m_W| < 15 \text{ GeV}$



**Abbildung 4.9:** Verteilung der Cambridge-Variablen  $M_{T2}$  nach allen Schnitten. Der im Text beschriebene Fit zur Messung von  $m_{\tilde{q}} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$  ist über dem Histogramm eingezeichnet (Abbildung aus [26]).

- die invariante Masse aus den Jet-Paaren und den bottom-Quarks ist konsistent mit dem top-Zerfall:  $|m_{bjj} - m_t| < 30 \text{ GeV}$

Nach der Untergrundreduzierung werden die Kanten für die beiden Zerfallsmoden erhalten, deren Endpunkte durch

$$M_{tb}^2(\text{III})_j = m_t^2 + \frac{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{\chi}_j^\pm}^2}{2m_{\tilde{t}_1}^2} \left\{ (m_{\tilde{g}}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2 - m_t^2) + \sqrt{(m_{\tilde{g}}^2 - (m_{\tilde{t}_1} - m_t)^2)(m_{\tilde{g}}^2 - (m_{\tilde{t}_1} + m_t)^2)} \right\}$$

bzw.

$$M_{tb}^2(\text{IV})_{ij} = m_t^2 + \frac{m_{\tilde{g}}^2 - m_{\tilde{b}_i}^2}{2m_{\tilde{b}_i}^2} \left\{ (m_{\tilde{b}_i}^2 - m_{\tilde{\chi}_j^\pm}^2 + m_t^2) + \sqrt{(m_{\tilde{b}_i}^2 - (m_{\tilde{\chi}_j^\pm} - m_t)^2)(m_{\tilde{b}_i}^2 - (m_{\tilde{\chi}_j^\pm} + m_t)^2)} \right\}$$

gegeben sind. Falls die beiden Endpunkte experimentell nicht unterscheidbar sind so wird der gewichtete Kantenpunkt

$$M_{tb}^W = \frac{\text{BR}(\text{III})M_{tb}(\text{III})_1 + \text{BR}(\text{IV})_{11}M_{tb}(\text{IV})_{11}}{\text{BR}(\text{III}) + \text{BR}(\text{IV})_{11}} \quad (4.9)$$

gemessen, wobei

$$\text{BR}(\text{III}) = \text{BR}(\text{III})_1 + \text{BR}(\text{III})_{11} + \text{BR}(\text{III})_{21} \quad (4.10)$$

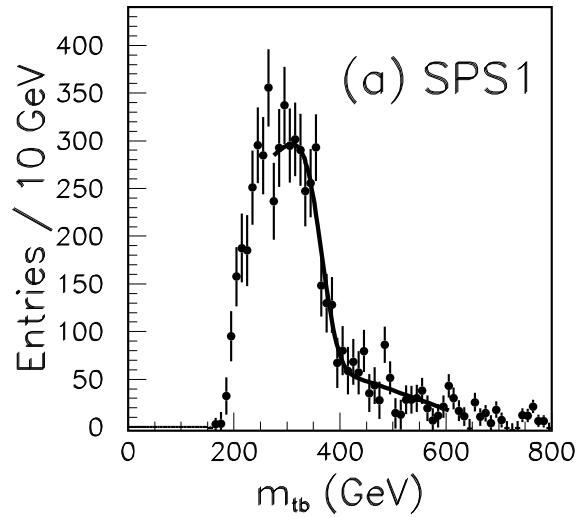
ist mit

$$(III)_{ij} = \tilde{g} \rightarrow b\tilde{b}_i \rightarrow bW\tilde{t}_1 \rightarrow b\tilde{b}W\tilde{\chi}_j^\pm, \quad (4.11)$$

da dieser Prozess einen nicht reduzierbaren Beitrag zum gewünschten Endzustand liefert. Eine Funktion die den Endpunkt parametrisiert wird schließlich an die in Abbildung 4.10 gezeigte Kante angepasst und ein statistischer Fehler von  $\pm 4.8$  GeV erhalten. Die der Studie zugrunde liegende Statistik ist mit  $N = 3 \cdot 10^6$  erzeugten SUSY-Ereignissen angegeben. Über den Zusammenhang

$$N = \sigma \int L dt \quad (4.12)$$

kann die entsprechende integrierte Luminosität  $\int L dt$  mit dem totalen SUSY-Wirkungs-querschnitt  $\sigma \sim 36$  pb für SPS1a zu  $\sim 80$  fb $^{-1}$  berechnet werden.



**Abbildung 4.10:** Verteilung der invarianten Masse  $m_{tb}$  aus dem Gluino-Zerfall für SPS1a. Der Endpunkt wird über eine an die Daten angepassten Parametrisierung erhalten (Abbildung aus [26]).

#### 4.1.8 Die Masse des Chargino $\chi_1^\pm$

Die Masse des  $\chi_1^\pm$  wird in [30] durch Selektion von Ereignissen gemessen, bei denen das eine von zwei produzierten Squarks  $\tilde{q}_R$  in der bereits bekannten Kaskade

$$\tilde{q}_L \rightarrow \tilde{\chi}_2^0 q \rightarrow \tilde{\ell}_R \ell q \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \ell \ell q \quad (4.13)$$

und das andere über

$$\tilde{q}_L \rightarrow \tilde{\chi}_1^\pm q \rightarrow q W^\pm \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow q q' q'' \tilde{\chi}_1^0 \quad (4.14)$$



zerfällt. Obwohl der Studie ein etwas anderer Punkt im mSUGRA-Paramterraum zugrundeliegt, sind die Unterschiede zu SPS1a für diese Arbeit als gering anzusehen. So beträgt hier  $M_0 = 100$  GeV,  $M_{1/2} = 300$  GeV,  $A_0 = -300$  GeV,  $\tan\beta = 6$  und  $\text{sign}\mu > 0$ . Das Verzweigungsverhältnis für den Prozess  $\tilde{\chi}_1^\pm \rightarrow W^\pm \tilde{\chi}_1^0$  ist in diesem Punkt mit 28% relativ groß und vermeidet zudem die Schwierigkeiten der fehlenden Information durch das nicht detektierbare Neutrino in dem häufigeren Zerfall  $\tilde{\chi}_1^\pm \rightarrow \tilde{\tau}_1 \nu_\tau$ . Im Folgenden werden die Massen des  $\tilde{\chi}_1^0$ ,  $\tilde{\chi}_2^0$ ,  $\tilde{\ell}_R$  und  $\tilde{q}_R$  als bekannt vorausgesetzt. Die Ereignisse werden durch die Schnitte

- mindestens 4 Jets mit  $p_T > 10$  GeV, von denen zwei  $p_T > 100$  GeV haben müssen
- $\left(\sum_{i=1}^4 p_{T(\text{Jet})}^i + \cancel{E}_T\right) > 400$  GeV
- $\cancel{E}_T > \max\left(100 \text{ GeV}, 0.2 \left(\sum_{i=1}^4 p_{T(\text{Jet})}^i + \cancel{E}_T\right)\right)$
- genau 2 isolierte OSSF-Elektronen oder Myonen mit  $p_T > 10$  GeV
- keine b-Jets oder  $\tau$ -Jets

ausgewählt. Für die beiden Leptonen wird gefordert, dass ihre invariante Masse unterhalb des zu der Zerfallskette gehörenden kinematischen Endpunkts liegt. Die invariante Masse der beiden Leptonen und einem der beiden harten Jets muss in mindestens einem Fall kleiner als der aus den bekannten Massen berechnete Endpunkt  $m_{q\ell\ell}$  sein. Die kleinere invariante Masse dieser Dilepton+-Jet-Kombination wird dann dem Zerfall des  $\chi_2^0$  zugeschrieben. Nach der Identifikation der Ereignisteilchen mit dem Endzustand der Zerfallskaskade (4.13) (wobei darauf verzichtet wurde, die Leptonen einem bestimmten Vertex zuzuordnen) können durch die Behandlung der kinematischen Gleichungen nun zwei Lösungen für den Impuls des  $\tilde{\chi}_1^0$  erhalten werden. Mit der bekannten Masse kann nun der Anteil dieses  $\tilde{\chi}_1^0$  an der fehlenden transversalen Energie  $\cancel{E}_T$  abgeleitet werden.

Schließlich können nach weiteren Schnitten die übrigen Jets dem Zerfall des anderen Squarks  $\tilde{q}_L$  zugeordnet und mit den beiden Impulsen des  $\tilde{\chi}_1^0$  aus der anderen Kette und der restlichen  $\cancel{E}_T$  (ebenfalls zwei) Impulse für das  $\tilde{\chi}_1^0$  in dieser Kette ausgerechnet werden. Aus der somit vollständig rekonstruierten Kette (4.14) erhält man zwei Massen für das  $\tilde{\chi}_1^\pm$ , von denen die kleinere für gewöhnlich als die physikalische angenommen wird. SUSY-Untergund und kombinatorischer Untergrund wird mit Hilfe einer statistischen Seitenband-Subtraktions-Technik reduziert. Die erhaltene Verteilung ist in Abbildung 4.11 zu sehen. Es wird davon ausgegangen, die Chargino-Masse mit dieser Methode auf  $\sim 11\%$  ihres Zentralwerts für  $100 \text{ fb}^{-1}$  messen zu können.

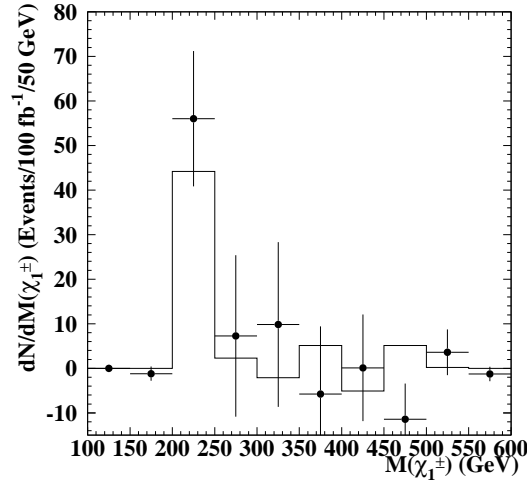
## 4.2 Weitere Observable

Zu den weiteren in dieser Arbeit verwendeten Observablen zählen:

- die Higgs-Masse  $m_h$ , mit

$$\begin{aligned}\sigma(m_h) &= \pm 1.4^{\text{stat}} \text{ GeV für } 10 \text{ fb}^{-1} \\ \sigma(m_h) &= \pm 0.1^{\text{stat}} \text{ GeV für } 300 \text{ fb}^{-1}\end{aligned}$$

nach [13],



**Abbildung 4.11:** Rekonstruierte Massenverteilung des  $\tilde{\chi}_1^\pm$  (Abbildung aus [30]). Die Signalereignisse sind als Histogramm, alle Ereignisse als Punkte mit Fehlern dargestellt.

- die Masse des top-Quarks  $m_t$ , mit

$$\begin{aligned}\sigma(m_t) &= \pm 1.1^{\text{stat}} \text{ GeV für } 1 \text{ fb}^{-1} \\ \sigma(m_t) &= \pm 0.05^{\text{stat}} \text{ GeV für } 10 \text{ fb}^{-1} \\ \sigma(m_t) &= \pm 0.01^{\text{stat}} \text{ GeV für } 300 \text{ fb}^{-1}\end{aligned}$$

nach [18]

- das Verhältnis der Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls des  $\tilde{\chi}_2^0$  in Leptonen zu dem Zerfall in Taus

$$\frac{\text{BR}(\tilde{\chi}_2^0 \rightarrow \tilde{\ell}\ell) \times \text{BR}(\tilde{\ell} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0\ell)}{\text{BR}(\tilde{\chi}_2^0 \rightarrow \tilde{\tau}_1\tau) \times \text{BR}(\tilde{\tau}_1 \rightarrow \tilde{\chi}_1^0\tau)} \quad (4.15)$$

mit einem statistischen Fehler, der sich grob nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung aus dem Fehler auf die Anzahl der bei einer bestimmten Luminosität produzierten Taus bzw. Selektionen und Smyonen zu

$$\sigma = \pm 0.009^{\text{stat}} \text{ GeV für } 1 \text{ fb}^{-1} \quad (4.16)$$

ergibt und einem systematischen Fehler von 10% auf den nominellen Wert nach [37]

- die kinematische Massenkante  $m_{\tau\tau}$

$$\sigma(m_{\tau\tau}) = \pm 4^{\text{stat}} \pm 4.5^{\text{syst}} \pm 7^{\text{pol}} \text{ GeV für } 10 \text{ fb}^{-1} \quad (4.17)$$

nach [22].

## 4.3 Luminosität

Die Anpassung der Parameter soll für drei verschiedene integrierte Luminositäten durchgeführt werden, um die zu erwartende zunehmende Einschränkung des Bereichs der möglichen Parameterwerte durch die Rekonstruktion mit der Laufzeit der einzelnen Experimente nachzuempfinden. Etwa ein Jahr nach Beginn der Messungen wird eine Luminosität von  $1 \text{ fb}^{-1}$  erreicht worden sein,  $10 \text{ fb}^{-1}$  entsprechen einer Betriebsdauer des LHC von rund zwei bis drei Jahren und  $300 \text{ fb}^{-1}$  spiegeln ungefähr die Verhältnisse im Jahr 2015 wieder. Den meisten der in den oberen Abschnitten dieses Kapitels besprochenen Studien liegt eine Luminosität von  $100 \text{ fb}^{-1}$  -  $300 \text{ fb}^{-1}$  zugrunde. Zwar existieren ebenfalls Analysen für niedrigere Luminositäten, doch sind diese nicht notwendigerweise für  $1 \text{ fb}^{-1}$  oder  $10 \text{ fb}^{-1}$  durchgeführt worden. Erschwerend kommt hinzu, dass sich einige Observablen bei zu geringen Ereignisraten gar nicht erst messen lassen.

Da nicht für jede gewünschte Luminosität eine detaillierte Studie inklusive Fehlerrechnung zur Verfügung steht, müssen die Unsicherheiten in diesen Fällen abgeschätzt werden. Der einfachste Ansatz besteht darin, den statistischen Fehler seiner Luminosität entsprechend zu skalieren: bei einer  $n$  mal so hohen Luminosität verringert sich der jeweilige Fehler um  $1/\sqrt{n}$ . Ein Rechenbeispiel: die in Abschnitt 4.1.1 als  $m_{\ell\ell}^{\text{max}}$  bezeichnete kinematische Kante hat einen statistischen Fehler von  $0.05 \text{ GeV}$  für  $100 \text{ fb}^{-1}$ . Der statistische Fehler für  $300 \text{ fb}^{-1}$  ergibt sich somit zu  $0.05/\sqrt{3} \text{ GeV} = 0.03 \text{ GeV}$ . Ein qualitativer Vergleich dieser Methode mit der Fehlerentwicklung bei vollwertigen Studien für niedrigere Luminositäten zeigt eine gute Übereinstimmung. Oftmals liegen die Fehler in der gleichen Größenordnung oder sind sogar überschätzt; die Methode ist daher eher als konservativ anzusehen. Eine Observable wird für eine bestimmte Luminosität als nicht beobachtbar deklariert, wenn sich in dem Histogramm, welches für die Messung herangezogen wurde, nach der Skalierung nur noch wenige bis gar keine Ereignisse pro Bin verbleiben.

## 4.4 Fehlerkorrelationen

Für die Messung der Energie der in den verschiedenen Ereignissen entstehenden Teilchen muss die absolute Skala des Ausgangssignals der Kalorimeterkomponenten des Detektors hinreichend genau verstanden sein. Dazu ist eine vorausgehende Kalibration durch den Nachweis von Teilchen mit bekannter Energie erforderlich. Diese Kalibration ist zum Einen für Quarks und das vornehmlich hadronisch zerfallende  $\tau$  experimentell wesentlich anspruchsvoller als für Elektronen oder Myonen. Zum anderen wird die Energiemessung von Quarks durch die Fragmentation in Jets von Hadronen erschwert. Hier müssen diverse Algorithmen die effektive Zuordnung eines bestimmten Kalorimetereintrags zu dem zerfallenen Quark leisten. Schätzungen gehen von einem systematischen Fehler von 1% des Zentralwertes auf die Skala der Jetenergie (JES, Jet Energy Scale) und von 0.01% auf die Messung der Energie von Elektronen und Myonen (LES, Lepton Energy Scale) aus. Bei sehr geringen Luminositäten zu Beginn der Messungen liegt dieser Beitrag sogar bei 5% auf die Skala der Jetenergie und bei 0.2% auf die Skala der Leptonenenergie. Der Fehler ist somit allen Observablen anzurechnen, deren Bestimmung auf der Messung der Energie von Jets bzw. Elektronen und Myonen beruhen. Eine Besonderheit ergibt sich bei den kinematischen Kanten, bei denen sowohl Quarks als auch Leptonen zur invarianten Masse beitragen. Hier ist der Fehler zusätzlich durch Mittelung um einen Faktor 0.5 reduziert (siehe [10]).

Da dieser systematische Fehler alle Observablen in der gleichen Weise betrifft, sind diese untereinander korreliert. Der Einfachheit halber wird dabei im Folgenden eine Korrelation von jeweils 100%

angenommen. Mathematisch beschreibt man diese Situation durch eine Kovarianzmatrix, welche insbesondere bei der Berechnung der  $\chi^2$ -Funktion eine Rolle spielt. Im nächsten Abschnitt soll nun nachvollzogen werden, wie die Kovarianzmatrix aus den gegebenen Anteilen der experimentellen Unsicherheiten für den globalen Fit erhalten wird. Der Darstellung sei ein kurzer Überblick der wichtigsten verwendeten Begriffe vorangestellt (nach [12]).

## 4.5 Elemente der Statistik

Zur Charakterisierung einer Verteilung von numerischen Werten  $\{x_i\} \equiv x$  durch eine einzige Zahl wird häufig das arithmetische Mittel

$$\langle x \rangle = \sum_i x_i \quad (4.18)$$

gebildet. Das Ausmaß der Streuung der individuellen Elemente der Verteilung um diesen Mittelwert wird in den meisten Fällen durch die sogenannte Varianz  $V$  angegeben:

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2, \quad (4.19)$$

oder in einer weiteren, kompakteren Notation

$$V(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (4.20)$$

also als Differenz der gemittelten Quadrate und dem Quadrat des Mittelwerts. Die Varianz hängt mit der oft zitierten Standardabweichung  $\sigma$  einer Verteilung über

$$\sigma = \sqrt{V(x)}. \quad (4.21)$$

zusammen. Hat man es mit zwei oder mehr solcher Verteilungen zu tun, so lässt sich neben den individuellen Mittelwerten und Varianzen bzw. Standardabweichungen die sogenannte Kovarianz zwischen den Verteilungen  $x_i$  und  $x_j$  definieren

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_i, x_j) &= \frac{1}{N} \sum_k (x_{i,k} - \langle x_i \rangle)(x_{j,k} - \langle x_j \rangle) \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle. \end{aligned}$$

Die Zahlen  $\text{cov}(x_i, x_j) \equiv V_{ij}$  können für  $n$  Verteilungen als Einträge einer Matrix, der Kovarianzmatrix  $\mathbf{V}$  aufgefasst werden

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1} & \dots & V_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Da die Varianz dimensionsbehaftet ist, wird zur Beschreibung der statistischen Abhängigkeit von Verteilungen besser der sogenannte Korrelationskoeffizient angegeben, der sich durch entsprechende Normierung aus der Kovarianz ergibt:

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(x_i, x_j)}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (4.23)$$

oder analog als Einträge einer Korrelationsmatrix:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Die Korrelationskoeffizienten nehmen Werte zwischen  $-1$  und  $1$  an und lassen sich daher leicht in ein prozentuales Verhältnis übersetzen. So bedeutet beispielsweise ein Korrelationskoeffizient von  $1$  eine (positive) Korrelation von  $100\%$ .

Bei einer physikalischen Messung wird die Varianz bzw. die Standardabweichung mit dem Fehler auf diese Messung identifiziert. Dieser Interpretation liegt die Überlegung zu Grunde, dass die mehrfache Messung einer Größe eine Verteilung von Messwerten mit der entsprechenden Varianz erzeugen würde. Obwohl Messfehler aus unterschiedlichen Quellen herrühren können, lassen sie sich kombinieren. Aus der Definition der Varianz ergibt sich der Gesamtfehler aus der quadratischen Summe der Einzelfehler:

$$V_{\text{ges}} = \sum_i \sigma_i^2. \quad (4.25)$$

Häufig setzt sich der Gesamtfehler aus einem statistischen und mehreren systematischen Fehleranteilen zusammen:

$$V_{\text{ges}} = \sigma_{\text{stat}}^2 + \sum_i \sigma_{\text{sys},i}^2. \quad (4.26)$$

Dies ist bei den Fehlern auf alle in diesem Kapitel behandelten LHC-Observablen der Fall. Der systematische Fehler besteht aus dem Fehler aus der Energiemessung, über welchen die Observablen zusätzlich korreliert sind, und optional aus weiteren Anteilen. Die Kovarianz berechnet sich demnach wie folgt: Zwei Observablen  $x_i$  und  $x_j$  mit  $i \neq j$  haben einen unkorrelierten Fehleranteil  $\sigma_i^{\text{unkorr}}$  bzw.  $\sigma_j^{\text{unkorr}}$  und einen korrelierten Fehleranteil  $\sigma_i^{\text{korrr}}$  bzw.  $\sigma_j^{\text{korrr}}$ . Bei  $100\%$  Korrelation ist  $\rho_{ij}$  in Gleichung (4.23) gleich  $1$  und es ergibt sich

$$\text{cov}(x_i, x_j) = \sigma_i^{\text{korrr}} \sigma_j^{\text{korrr}} \quad \text{für } i \neq j. \quad (4.27)$$

Da der Fehler der gleichen Observable immer zu  $100\%$  mit sich selbst korreliert ist, gilt für den Fall  $i = j$  mit den oben gewählten Bezeichnungen

$$\text{cov}(x_i, x_i) = \left(\sigma_i^{\text{unkorr}}\right)^2 + \left(\sigma_i^{\text{korrr}}\right)^2. \quad (4.28)$$

Die Korrelationsmatrix besteht dementsprechend aus den Elementen

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_i^{\text{korrr}} \sigma_j^{\text{korrr}}}{\sqrt{\sigma_i^{\text{unkorr}^2} + \sigma_i^{\text{korrr}^2}} \sqrt{\sigma_j^{\text{unkorr}^2} + \sigma_j^{\text{korrr}^2}}}. \quad (4.29)$$

Durch die Existenz einer Kovarianzmatrix mit nichtverschwindenden Nebendiagonaleinträgen modifiziert sich die bei der Parameterrekonstruktion zu minimierende  $\chi^2$ -Funktion mit den Bezeichnungen aus Kapitel 3 zu

$$\chi^2 = \left(\mathbf{O}^{\text{Messung}} - \mathbf{O}^{\text{Theorie}}(\mathbf{P})\right)^T \mathbf{V}^{-1} \left(\mathbf{O}^{\text{Messung}} - \mathbf{O}^{\text{Theorie}}(\mathbf{P})\right). \quad (4.30)$$

Eine Zusammenfassung aller betrachteten LHC-Observablen samt ihrer Fehleranteile lässt sich nach den unterschiedlichen Luminositäten getrennt in Tabelle [4.3](#) wiederfinden. Im nächsten Kapitel wird schließlich die Rekonstruktion des mSUGRA-Punktes SPS1a aus diesen Observablen ausführlich dargestellt.

Observable	Nomineller Wert (GeV)	Unsicherheit (GeV)							
		1 fb <sup>-1</sup>	10 fb <sup>-1</sup>	300 fb <sup>-1</sup>	LES <sub>1</sub>	LES <sub>10,300</sub>	JES <sub>1</sub>	JES <sub>10,300</sub>	syst.
$m_h$	109.1		1.4	0.1		0.1			
$m_t$	170.9	1.1	0.05	0.01			1.5	1.0	
$m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$	179.9			11.4				1.8	
$m_{\tilde{\ell}_L} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$	148.8			1.7		0.1			6.0
$m_{\tilde{g}} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$	510.2		13.7	2.5				2.6	10.0
$m_{\tilde{q}_R} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$	533.7	19.6	6.2	1.1			26.7	5.3	10.0
$\langle m_{\tilde{g}} - m_{\tilde{b}_{1,2}} \rangle$	522.6		5.4					2.6	
$m_{\tilde{g}} - m_{\tilde{b}_1}$	89.0			1.5				0.4	
$m_{\tilde{g}} - m_{\tilde{b}_2}$	56.7			2.5				0.3	
$m_{\ell\ell}^{\max}$	80.2	1.7	0.5	0.03	0.16	0.08			
$m_{\ell\ell}^{\max}$	279.1		12.6	2.3		0.28			
$m_{\tau\tau}^{\max}$	83.2	12.6	4.0	0.73			4.2	0.8	8.3
$m_{\ell\ell q}^{\max}$	454.3	13.9	4.2	1.4			11.4	2.3	
$m_{\ell q}^{\text{low}}$	320.3	7.6	3.5	0.9			8.0	1.6	
$m_{\ell q}^{\text{high}}$	398.3	5.2	4.5	1.0			10.0	2.0	
$m_{\ell\ell q}^{\text{thres}}$	216.2	26.5	4.8	1.6			5.4	1.1	
$m_{\ell\ell b}^{\text{thres}}$	196.4		19.7	3.6				1.0	
$m_{tb}^w$	360.9	43.0	13.6	2.5			18.0	3.6	
$\frac{\text{BR}(\tilde{\chi}_2^0 \rightarrow \tilde{\ell}\ell) \times \text{BR}(\tilde{\ell} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \ell)}{\text{BR}(\tilde{\chi}_2^0 \rightarrow \tilde{\tau}_1 \tau) \times \text{BR}(\tilde{\tau}_1 \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \tau)}$	0.08	0.009	0.003	0.001					0.008
$\frac{\text{BR}(\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_2 b) \times \text{BR}(\tilde{b}_2 \rightarrow \tilde{\chi}_2^0 b)}{\text{BR}(\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1 b) \times \text{BR}(\tilde{b}_1 \rightarrow \tilde{\chi}_2^0 b)}$	0.16			0.078					

**Tabelle 4.3:** Zusammenstellung aller in dieser Arbeit verwendeten LHC-Observablen. Die nominellen Werte wurden von SPheno für den Punkt SPS1a auf der Energieskala  $Q(m_Z)$  ausgerechnet. Die Unsicherheiten teilen sich in den statistischen Fehler (Spalten 3-5), den korrelierten systematischen Fehler auf die Energiemessung (LES für Leptonen, JES für Jets) in den Kalorimetern (Spalten 6-9) und einen unkorrelierten systematischen Fehler auf (Spalte 10). Die Angabe erfolgt getrennt nach den integrierten Luminositäten 1 fb<sup>-1</sup> (LES<sub>1</sub>, JES<sub>1</sub>), 10 fb<sup>-1</sup> (LES<sub>10</sub>, JES<sub>10</sub>) und 300 fb<sup>-1</sup> (LES<sub>300</sub>, JES<sub>300</sub>).





## Kapitel 5

# Rekonstruktion für den mSUGRA-Punkt SPS1a

Das vorliegende Kapitel fasst die Vorgehensweise innerhalb dieser Studie zusammen, an deren Ende als Ergebnis die Rekonstruktion des mSUGRA-Punktes SPS1a erhalten wird. Begonnen wird mit einem einzelnen Fit der Parameter an die LHC-Observablen für drei verschiedene integrierte Luminositäten mit einer Bestimmung der Parameterunsicherheiten durch das Programm MINUIT. In der Folge wird die Rekonstruktion des Parameterpunktes und die Abschätzung der Unsicherheiten unter Verwendung von Monte-Carlo-Methoden wiederholt und die Ergebnisse beider Ansätze miteinander verglichen. Likelihood-Karten ergänzen schließlich die gewonnenen Einsichten in den mSUGRA-Parameter-raum. In einem weiteren Abschnitt soll mit Hilfe der Parameterrekonstruktion die Möglichkeit der Unterscheidung zwischen der Annahme eines positiven oder negativen Vorzeichens für den Higgs-Massenparameter  $\mu$  ausgelotet werden. Zum Schluss wird der LHC-Observablensatz um eine Reihe von Niederenergieobservablen erweitert und deren Einfluss auf die Parameterrekonstruktion für  $1 \text{ fb}^{-1}$  untersucht.

### 5.1 Rekonstruktion aus LHC-Observablen

In einem ersten Arbeitsschritt sollen die Parameter der mSUGRA-Lagrange-Dichte allein aus den LHC-Observablen aus Tabelle 4.3 gewonnen werden. Dazu schreibt man zunächst alle Observablen mit ihren Unsicherheiten und Korrelationen in die Fittino-Eingabedatei. Die Syntax ist hierbei

```
<Observablentyp> <Wert> +- <unkorrelierte Unsicherheit>  
                [+ <unkorrelierte Unsicherheit>]  
                [+ (<Korrelations-Tag>) <korrelierte Unsicherheit>]
```

wobei <Observablentyp> eine kinematische Massenkante, eine Teilchenmasse, ein Wirkungsquerschnitt usw. sein kann. Mit <Wert> wird der Zentralwert der Observable spezifiziert, gefolgt von einer beliebigen Anzahl von unkorrelierten Fehlerbeiträgen. Optional besteht darüber hinaus die Möglichkeit bis zu zehn korrelierte Fehleranteile mit einem in Klammern gefassten, sogenannten „Tag“ zu versehen. Weisen nun zwei Observablen Fehleranteile mit dem gleichen Tag auf, so werden diese zu 100% korreliert und ein entsprechender Eintrag wird in die Korrelationsmatrix bzw. Kovarianzmatrix geschrieben. Als Beispiel lauten die entsprechenden Einträge für die beiden Observablen top-Masse und  $\tilde{\chi}_1^\pm$ -Masse aus Tabelle 4.3 für  $300 \text{ fb}^{-1}$ :

```
massTop          170.9   GeV +- 0.01 GeV +- (JES) 1   GeV  
massChargino1    179.917 GeV +- 11.4   GeV +- (JES) 1.8 GeV
```

Demnach haben die Observablen je einen unkorrelierten (statistischen) und einen (systematischen) korrelierten Fehleranteil (Korrelations-Tag (JES)) aufgrund der Unsicherheit auf die Energiemessung von Jets. Alternativ kann ein einzelner Eintrag in der Korrelationsmatrix auch durch

Allgemeine Optionen	
Option	Beschreibung
<code>fitModel</code>	Wählt das zu rekonstruierende Modell
<code>CalcPullDist</code>	Streuung der Observablen vor dem Fit
<code>PerformFit</code>	Schaltet Parameterfit
Optionen zur Steuerung von Simulated Annealing	
Option	Beschreibung
<code>UseSimAnnBefore</code>	Schaltet Simulated Annealing vor MINUIT
<code>InitTempSimAnn</code>	Setzt Starttemperatur auf den angegebenen Wert
<code>GetTempFromFirstChiSqr</code>	Berechnet Starttemperatur aus anfänglichem $\chi^2$ -Wert
<code>TempRedSimAnn</code>	Faktor zur schrittweisen Reduzierung der Temperatur
<code>MaxCallsSimAnn</code>	Maximale Anzahl der Prozeduraufrufe
Optionen zur Erstellung einer Likelihood-Karte	
Option	Beschreibung
<code>UseMarkovChains</code>	Schaltet Erstellung einer Likelihood-Karte
<code>MaxMarkovChain</code>	Anzahl der zu entnehmenden Stichproben

**Tabelle 5.1:** Aufstellung der für diese Arbeit wichtigen Optionen zur Steuerung von Simulated Annealing zusammen mit einer kurzen Beschreibung ihrer Funktionsweise. Eine umfassende Dokumentation ist in [15] zu finden.

`correlationCoefficient <Observable1> <Observable2> <Wert>`

gesetzt werden, wobei hier der Koeffizient zuvor anhand von Gleichung (4.23) ausgerechnet werden muss. Diese Methode ist aber mühsamer, fehleranfälliger und zudem äußerst unflexibel.

Das zu rekonstruierende Modell wird nun mit

`fitModel mSUGRA`

ausgewählt. Jeder Parameter kann bei der Rekonstruktion frei variiert (Präfix `fitParameter`) oder auf einen bestimmten Wert festgesetzt werden (`fixParameter`). Die Startwerte für den Fit sind in der gleichen Zeile hinter dem jeweiligen Parameter angegeben und entsprechen den nominellen Parameterwerten im Punkt SPS1a. Das Ergebnis der Rekonstruktion darf natürlich nicht wesentlich von der Wahl dieser Startparameter abhängen. Dass dies bei einem allein auf MINUIT basierenden Fit auch bei vermeintlich nicht allzu herausfordernden Szenarien nicht der Fall ist, zeigt das Beispiel einer Rekonstruktion des SU3-Punktes, der ähnlich wie SPS1a in der Bulk-Region des mSUGRA-Parameterraumes liegt (siehe weiter unten). Mit vor der Funktionsoptimierung mit MINUIT durchgeführtem Simulated Annealing lässt sich dieses Problem aber umgehen. Die Einträge für die mSUGRA-Parameter lauten demnach:

```
fitParameter M0      100 GeV
fitParameter M12     250 GeV
fitParameter A0      -100 GeV
fitParameter TanBeta  10
fixParameter SignMu   1
```

Alle Standardmodell-Parameter werden auf den von SPHENO (für SPS1a) berechneten Zentralwert gesetzt:

```
fixParameter massTop      170.9      GeV
fixParameter massZ        91.1876    GeV
fixParameter massCharm     1.2        GeV
fixParameter massbottom    4.5        GeV
fixParameter massTau       1.77699    GeV
fixParameter alphas        0.1187
fixParameter alphaem       127.934
fixParameter G_F           1.16637e-5
```

Hierbei bezeichnen die ersten fünf Parameter Massen von Standardmodell-Teilchen, z. B. steht `massTop` für die Masse des top-Quark. Weiterhin ist `alphas` die starke Kopplungskonstante  $\alpha_S$  und `alphaem` die Inverse der elektromagnetischen Kopplungskonstante  $\alpha_{em}^{-1}$ . Die Fermi-Konstante `G_F` wird in  $\text{GeV}^{-2}$  gemessen.

Simulated Annealing vor MINUIT wird mit den folgenden Einstellungen in der Input-Datei gesteuert:

```
UseSimAnnBefore on
InitTempSimAnn  5
TempRedSimAnn   0.5
MaxCallsSimAnn  20000
```

Gemäß Tabelle 5.1 beträgt die Anfangstemperatur nun 5 und der Reduzierungsfaktor 0.5. Dabei handelt es sich um Erfahrungswerte, die sich bei den hier behandelten Problemen als günstig erwiesen haben. Je höher die Temperatur, desto eingehender wird der Parameterraum untersucht. Der Maßgabe einer weiträumigen und umfassenden Analyse steht allerdings immer ein entsprechend hoher zeitlicher Aufwand entgegen. Die Endtemperatur ergibt sich nach der Formel

$$T_{\text{end}} = T_0 r^{\text{floor}\left(\frac{n}{60 \cdot 20 \cdot p}\right)}, \quad (5.1)$$

wobei  $T_0$  die Starttemperatur und  $r$  den Reduzierungsfaktor bezeichnen. Die Option `MaxCallsSimAnn` setzt die Anzahl  $n$  der Funktionsaufrufe zur Berechnung des  $\chi^2$ -Wertes, die Zahlen 60 und 20 ergeben sich aus der konkreten Implementierung des Algorithmus (siehe auch Abschnitt 3.4.1) und  $p$  ist die Anzahl der freien Parameter (für `mSUGRA` ist  $p = 4$ ). In diesem Fall ergibt sich  $T_{\text{end}}$  beispielsweise also zu 0.3125. Der Fit selbst wird schließlich mit

```
PerformFit on
```

angeschaltet. Die übrigen Fittino-Optionen verbleiben zunächst in ihren Standardeinstellungen. Das Ergebnis der Rekonstruktion und der von MINUIT angegebene Fehler auf die Parameter ist in Tabelle 5.2 dargestellt. Es wird ein minimales  $\chi^2$  von 0 erwartet, da die Werte für die Observablen direkt aus den wahren Parametern berechnet wurden.

Parameter	Gefitteter Wert	Absolute Unsicherheit	Relative Unsicherheit
$M_0$	100.0 GeV	6.6 GeV	6.6%
$M_{1/2}$	250.0 GeV	8.6 GeV	3.4%
$A_0$	-100.0 GeV	447.6 GeV	447.6%
$\tan\beta$	10.0	6.2	62.0%
$\int \mathcal{L} dt = 1 \text{ fb}^{-1}, \chi^2 : 1.05521 \cdot 10^{-6}$			

Parameter	Gefitteter Wert	Absolute Unsicherheit	Relative Unsicherheit
$M_0$	100.0 GeV	1.9 GeV	1.9%
$M_{1/2}$	250.0 GeV	1.1 GeV	0.4%
$A_0$	-100.0 GeV	49.0 GeV	49.0%
$\tan\beta$	10.0	0.8	8.3%
$\int \mathcal{L} dt = 10 \text{ fb}^{-1}, \chi^2 : 8.32134 \cdot 10^{-5}$			

Parameter	Gefitteter Wert	Absolute Unsicherheit	Relative Unsicherheit
$M_0$	100.00 GeV	0.46 GeV	0.46%
$M_{1/2}$	250.00 GeV	0.29 GeV	0.12%
$A_0$	-100.0 GeV	11.0 GeV	11.0%
$\tan\beta$	10.00	0.35	3.48%
$\int \mathcal{L} dt = 300 \text{ fb}^{-1}, \chi^2 : 0.00167945$			

**Tabelle 5.2:** Ergebnis der Rekonstruktion der *mSUGRA*-Parameter in dem Punkt SPS1a für  $1 \text{ fb}^{-1}$ ,  $10 \text{ fb}^{-1}$  und  $300 \text{ fb}^{-1}$ . Die gefitteten Werte entsprechen der Erwartung, der jeweilige  $\chi^2$ -Wert ist mit 0 kompatibel. Die Bestimmung der Unsicherheiten erfolgt durch MINUIT.

## 5.2 Rekonstruktion mit gestreuten Observablen

Die Rekonstruktion soll nun ein weiteres Mal mit den gleichen Observablen durchgeführt werden. Im Unterschied zu dem im vorigen Abschnitt behandelten Vorgehen wird jetzt ein Satz von 500 Fits parallel abgearbeitet, bei welchen jeweils die Zentralwerte der Observablen innerhalb ihrer Unsicherheiten entsprechend einer multivariaten Gauß-Verteilung

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det V}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T V^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \quad (5.2)$$

gestreut werden, wobei  $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$  den Vektor der  $n$  gestreuten Observablenwerte,  $\boldsymbol{\mu}$  den Vektor der nominellen Zentralwerte der Observablen und  $V$  die Kovarianzmatrix bezeichnen. Es ist zu erwarten, dass hierbei für hinreichend kleine Fehler auf die Observablen ein Satz von Parametern rekonstruiert wird, der sich ebenfalls gaußförmig um die wahren Parameterwerte anordnet, da sich jede Funktion  $f$ , Differenzierbarkeit vorausgesetzt, in eine Taylor-Reihe um einen beliebigen Punkt  $x_0$  in ihrem Definitionsbereich entwickeln lässt:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots \quad (5.3)$$

Im Falle kleiner Abweichungen  $(x - x_0)$  vom Zentralwert dominiert der lineare Term und „Ellipsen“ im Observablenraum werden auf „Ellipsen“ im Parameterraum abgebildet (bei großen Unsicherheiten sind jedoch auch Terme höherer Ordnung nicht mehr vernachlässigbar und führen entsprechend zu einer Verzerrung dieser „Ellipsen“). Der Mittelwert einer an die erhaltene Parameterverteilung angepassten Gauß-Kurve ist somit als eine Schätzung der wahren Werte anzusehen, ihre Breite bzw. ihre Standardabweichung ist dann ein Maß für den Fehler auf die rekonstruierten Parameter. Hierzu werden die folgenden Einstellungen in Fittino vorgenommen: der Schalter

`CalcPullDist on`

bewirkt, dass die Zentralwerte der Observablen vor dem Fit gaußisch gestreut werden. Durch

`GetTempFromFirstChiSqr on`

wird die Starttemperatur zu 1/10 des anfänglichen  $\chi^2$ -Wertes berechnet, was erfahrungsgemäß für die meisten Fälle ausreichend ist. Die am Ende der einzelnen Fits erhaltenen  $\chi^2$ -Werte sollten der  $\chi^2$ -Verteilung

$$P(\chi^2; n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} \chi^{n-2} \exp \left( -\frac{\chi^2}{2} \right) \quad (5.4)$$

folgen, wobei  $\Gamma$  die Gamma-Funktion und  $n$  die Anzahl der sogenannten Freiheitsgrade des Fits sind, welche sich aus der Differenz der Anzahl der Observablen und der Anzahl der Parameter ergibt. In Abbildung 5.1 sind zunächst als Beispiel die eindimensionalen gaußförmigen Verteilungen zweier korrelierter Observablen gezeigt, wie sie von Fittino als Input für die Fits erzeugt werden und in Abbildung 5.2 sind die gleichen Observablen in einem Streudiagramm zu sehen. Anhand der ebenfalls eingezeichneten theoretisch erwarteten Vertrauensbereiche (CL, Confidence Level) lässt sich ablesen, dass das Programm Verteilungen mit den korrekten Korrelationen erzeugt. Die

Konturlinien der Vertrauensbereiche ergeben sich aus der auf den Spezialfall  $n = 2$  reduzierten multivariaten Gauß-Verteilung

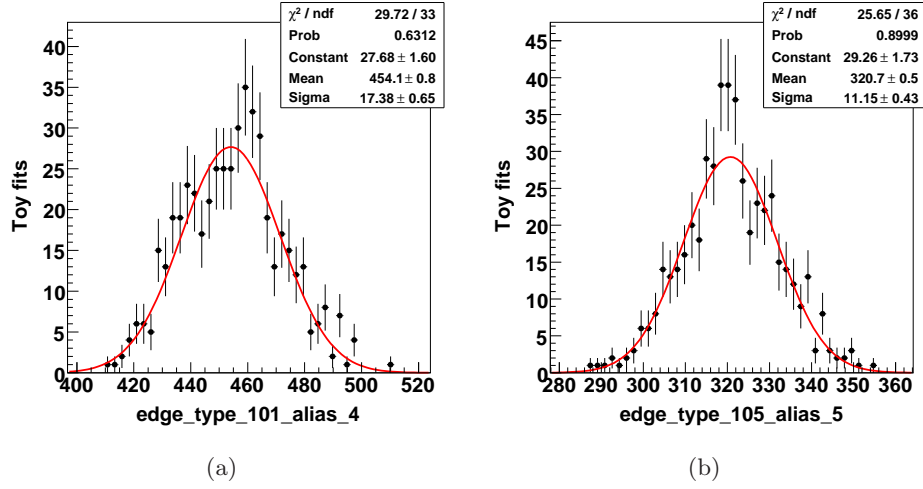
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right)$$

als Äquipotenziallinien zu den Funktionswerten (aus [25])

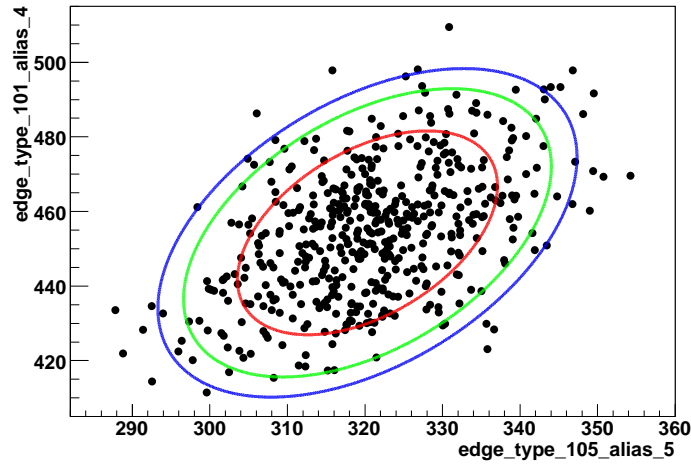
$$\begin{aligned} f\left(\mu_1 + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \sqrt{2.30} \cdot \sigma_1, \mu_2\right) & \text{ für } 68.27\% \text{ CL} \\ f\left(\mu_1 + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \sqrt{4.61} \cdot \sigma_1, \mu_2\right) & \text{ für } 90\% \text{ CL} \\ f\left(\mu_1 + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \sqrt{5.99} \cdot \sigma_1, \mu_2\right) & \text{ für } 95\% \text{ CL.} \end{aligned}$$

Bevor nun die Verteilungen der aus jedem dieser gestreuten Observablensätze rekonstruierten Parameter besprochen werden, soll ein Beispiel die Notwendigkeit von Simulated Annealing vor der Funktionsminimierung durch MINUIT verdeutlichen.

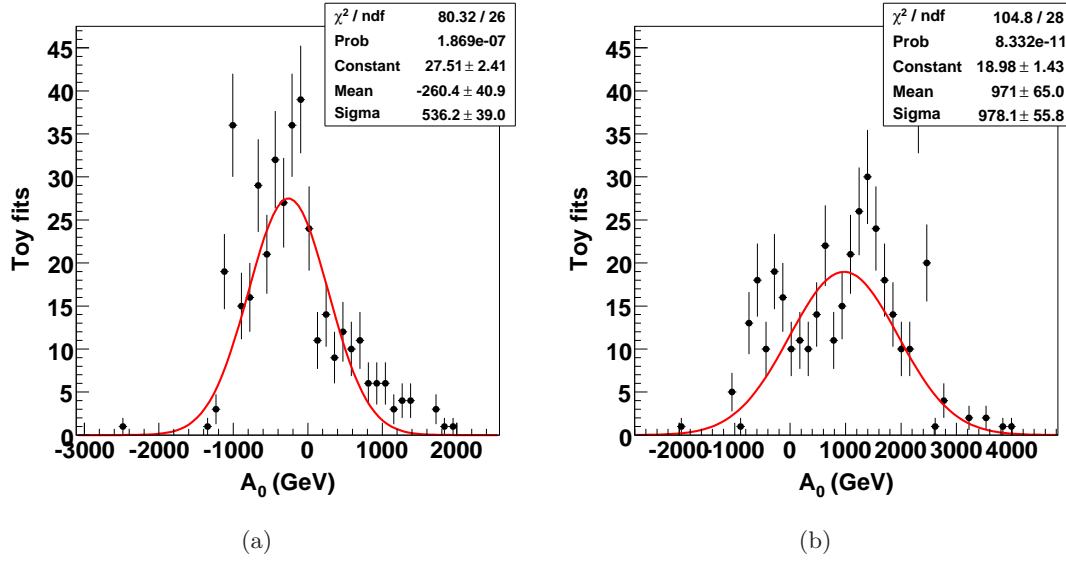
Die Abbildungen 5.3(a) und 5.3(b) zeigen die Verteilungen von rekonstruierten Parametern  $A_0$  aus einem ähnlich zu dem in dieser Arbeit für  $1 \text{ fb}^{-1}$  verwendeten Observablensatz und unterscheiden sich nur durch die Wahl der Startparameter für den Fit. Die Zentralwerte wurden hier für den Parameterpunkt SU3 ausgerechnet, der sich aber nicht wesentlich von SPS1a unterscheidet. Es gilt  $A_0 = -300 \text{ GeV}$  in SU3, d. h. man erwartet eine Häufung in der Verteilung der rekonstruierten Parameterwerte um diesen Punkt. Beide Abbildungen zeigen diese Häufung um  $A_0 = -300 \text{ GeV}$ , aber in 5.3(b) ist ein weitaus größeres Maximum der Verteilung bei etwa  $A_0 = 1500 \text{ GeV}$  zu sehen. Nicht die Existenz dieses zweiten Maximums ist von vornherein verwunderlich, da die Unsicherheiten auf die Observablen für  $1 \text{ fb}^{-1}$  noch recht groß sind und somit nichtlineare Terme der Abbildung auf den Parameterraum eine Rolle spielen könnten. Dieses Verhalten tritt auch bei der Rekonstruktion des Punktes SPS1a für  $1 \text{ fb}^{-1}$  zu Tage und wird weiter unten eingehender besprochen. Die Tatsache allerdings, dass für verschiedene Startwerte zwei qualitativ unterschiedliche Verteilungen erhalten werden, macht einen Parameterfit, der auf der Grundlage von Minuit allein durchgeführt wird, gerade für niedrige Luminositäten schlichtweg unbrauchbar. In 5.3(a) wurden die Startparameter auf die nominellen SU3-Werte gesetzt. Die auf den ersten Blick „schönere“, eher gaußförmige Verteilung ist dadurch zu erklären, dass MINUIT bereits das nach wenigen Variationsschritten von  $A_0$  (und den übrigen Parametern) erzielte  $\chi^2$  als das Beste annimmt. Ohne Zweifel ist dieses natürlich in unmittelbarer Nähe zu dem nominellen Wert besonders niedrig, aber 5.3(b) zeigt eindeutig, dass es auch Observablenkombinationen gibt, die ein niedriges  $\chi^2$  bei  $A_0 = 1500 \text{ GeV}$  aufweisen. Hier wurde der Startwert von  $A_0$  auf  $580 \text{ GeV}$  gesetzt. Dadurch, dass dieser Startwert nicht dem nominellen Wert entspricht, ist der Algorithmus gezwungen, sich mehr im Parameterraum zu bewegen und scheint sich mehrheitlich für das Funktionsminimum bei  $A_0 = 1500 \text{ GeV}$  zu entscheiden. Doch auch in diesem Fall ist nicht gesichert, dass dieser Wert für die meisten Observablenkombinationen tatsächlich das Optimum darstellt. Es könnte sich lediglich um ein Nebenminimum handeln, aus dem der Algorithmus, einmal hineingeraten, nicht mehr entkommt. Die beiden Verteilungen der  $\chi^2$ -Werte nach Formel (5.4), die nahezu identisch sind und den Erwartungen entsprechen, können ebenfalls keine Entscheidung in dieser Frage herbeiführen.



**Abbildung 5.1:** Verteilungen der gestreuten Observablen am Beispiel der beiden Massenkanten  $m_{\ell\ell q}^{\max}$  (mit der Alias-Nummer 4) und  $m_{\ell q}^{\text{low}}$  (mit der Alias-Nummer 5). Die Mittelwerte und die Standardabweichungen der an die erzeugten Verteilungen angepassten Gauß-Funktionen sind mit der theoretischen Erwartung von  $m_{\ell\ell q}^{\max} = 454.3 \text{ GeV} \pm 18.0 \text{ GeV}$  und  $m_{\ell q}^{\text{low}} = 320.3 \text{ GeV} \pm 11.0 \text{ GeV}$  zu vergleichen.



**Abbildung 5.2:** Streuung der Observablen vor dem Fit am Beispiel der korrelierten kinematischen Massenkanten  $m_{\ell\ell q}^{\max}$  (Alias-Nummer 4) und  $m_{\ell q}^{\text{low}}$  (Alias-Nummer 5). Der positive Korrelationskoeffizient  $\rho = 0.46$  bewirkt eine Drehung der Fehlerellipse gegen den Uhrzeigersinn. Eingezeichnet sind darüber hinaus die elliptischen Vertrauensbereiche, welche im Mittel 68% (rot), 90% (grün) und 95% (blau) der 500 Observablenkombinationen enthalten.



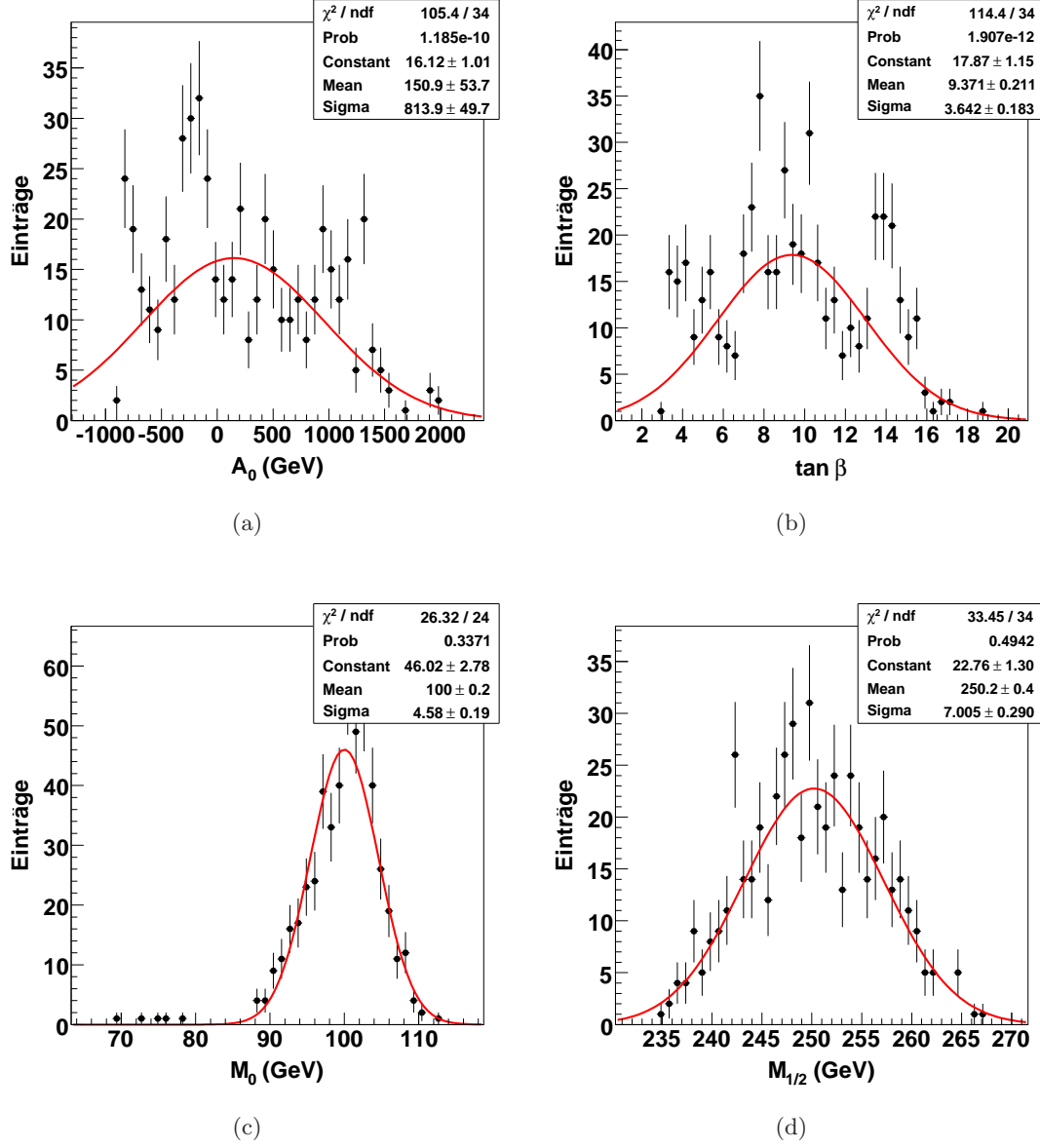
**Abbildung 5.3:** Abhängigkeit der allein auf MINUIT basierenden Rekonstruktion von den Startwerten ((a)  $A_0 = -300$  GeV, (b)  $A_0 = 580$  GeV) des Fits. Der qualitative Unterschied zwischen den Verteilungen der rekonstruierten Parameter ist nicht akzeptabel.

Das oben genannte Beispiel soll Grund genug sein, Simulated Annealing bei allen in dieser Arbeit besprochenen Rekonstruktionen zu verwenden. Die als Ergebnis erhaltenen, eindimensionalen Verteilungen der vier mSUGRA-Parameter sind in den Abbildungen 5.4 für  $1 \text{ fb}^{-1}$ , 5.5 für  $10 \text{ fb}^{-1}$  und 5.6 für  $300 \text{ fb}^{-1}$  zu sehen.

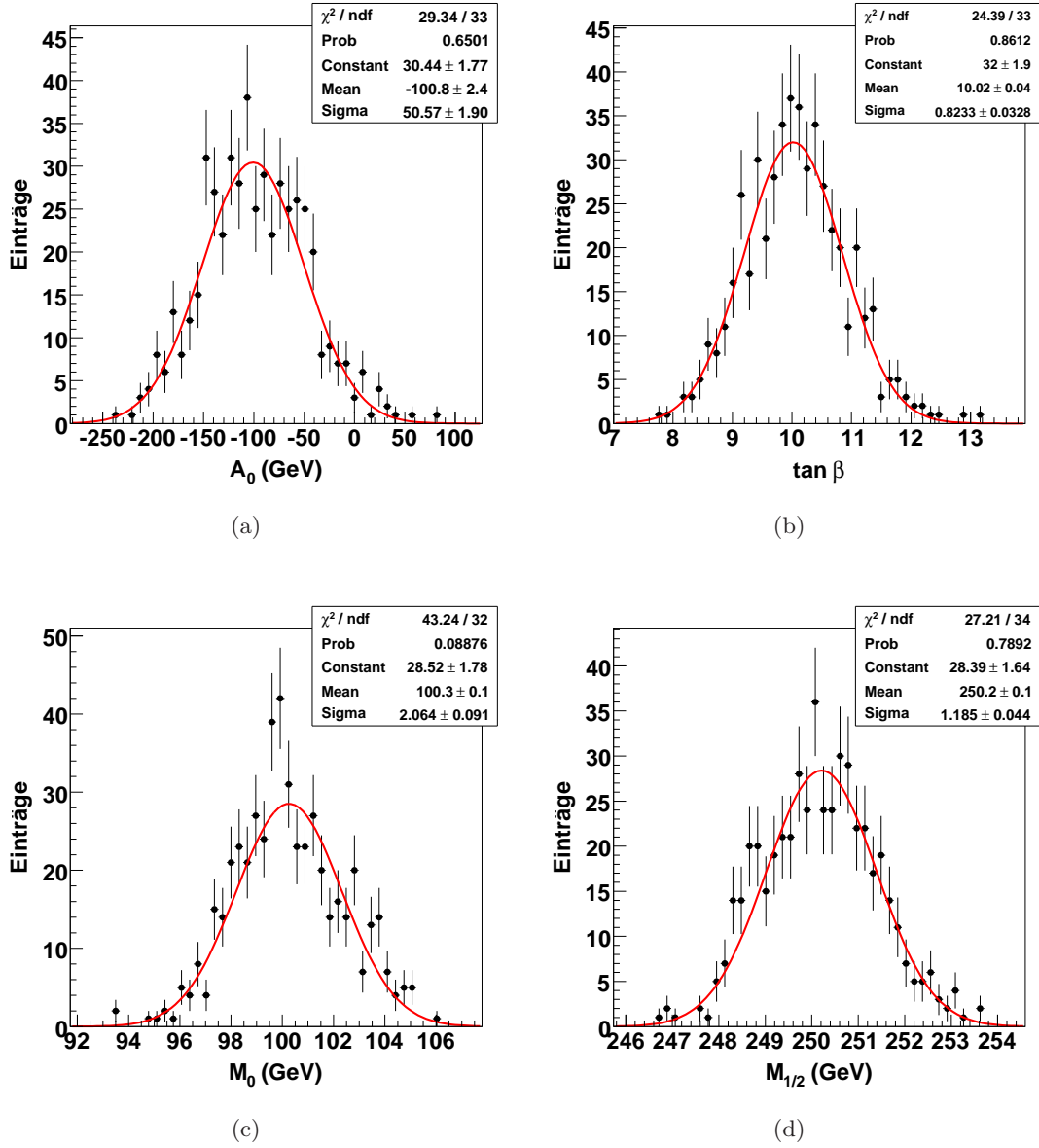
Es zeigt sich, dass die Verteilungen für  $10 \text{ fb}^{-1}$  und  $300 \text{ fb}^{-1}$  gut durch eine Gauß-Verteilung beschrieben werden. Die Unsicherheiten auf die Observablen sind hier also offensichtlich gering genug, so dass die Abbildung von dem Observablenraum in den Parameterraum durch ihren linearen Anteil dominiert wird. Die Standardabweichung der an die Verteilung angepasste Gauß-Funktion liefert den Fehler auf den rekonstruierten Parameter. Es ist festzustellen, dass die Zentralwerte der Verteilungen gut mit den erwarteten SPS1a-Werten übereinstimmen. Insgesamt liegen die so erhaltenen Unsicherheiten auf die Parameter in derselben Größenordnung wie bei den Einzelfits aus dem vorhergehenden Abschnitt. Dies legt nahe, dass MINUIT eine verlässliche Abschätzung des Fehlers auf die Parameter liefert, solange es von Simulated Annealing zu dem mutmaßlich richtigen globalen Funktionsminimum geleitet wird.

Etwas anders sieht die Situation für den Fit mit  $1 \text{ fb}^{-1}$  aus. Die Parameter  $A_0$  und  $\tan \beta$  zeigen deutliche Abweichungen von einer Gauß-Verteilung; vielmehr scheint es Observablenkombinationen zu geben, die ein kleines  $\chi^2$  für andere als die nominellen Parameterwerte hervorrufen. Bei diesen niedrigen Statistiken spielen also die nichtlinearen Terme der Abbildung von den Observablen in den Parameterraum eine nicht vernachlässigbare Rolle. In diesem Fall ist eher das arithmetische Mittel der Verteilung als rekonstruierter Parameterwert und die RMS-Varianz als seine Unsicherheit heranzuziehen. Die Parameter  $M_0$  sowie  $M_{1/2}$  scheinen hingegen annähernd gaußverteilt zu sein, obwohl auch für  $M_0$  signifikant zu viele niedrige Werte rekonstruiert werden.

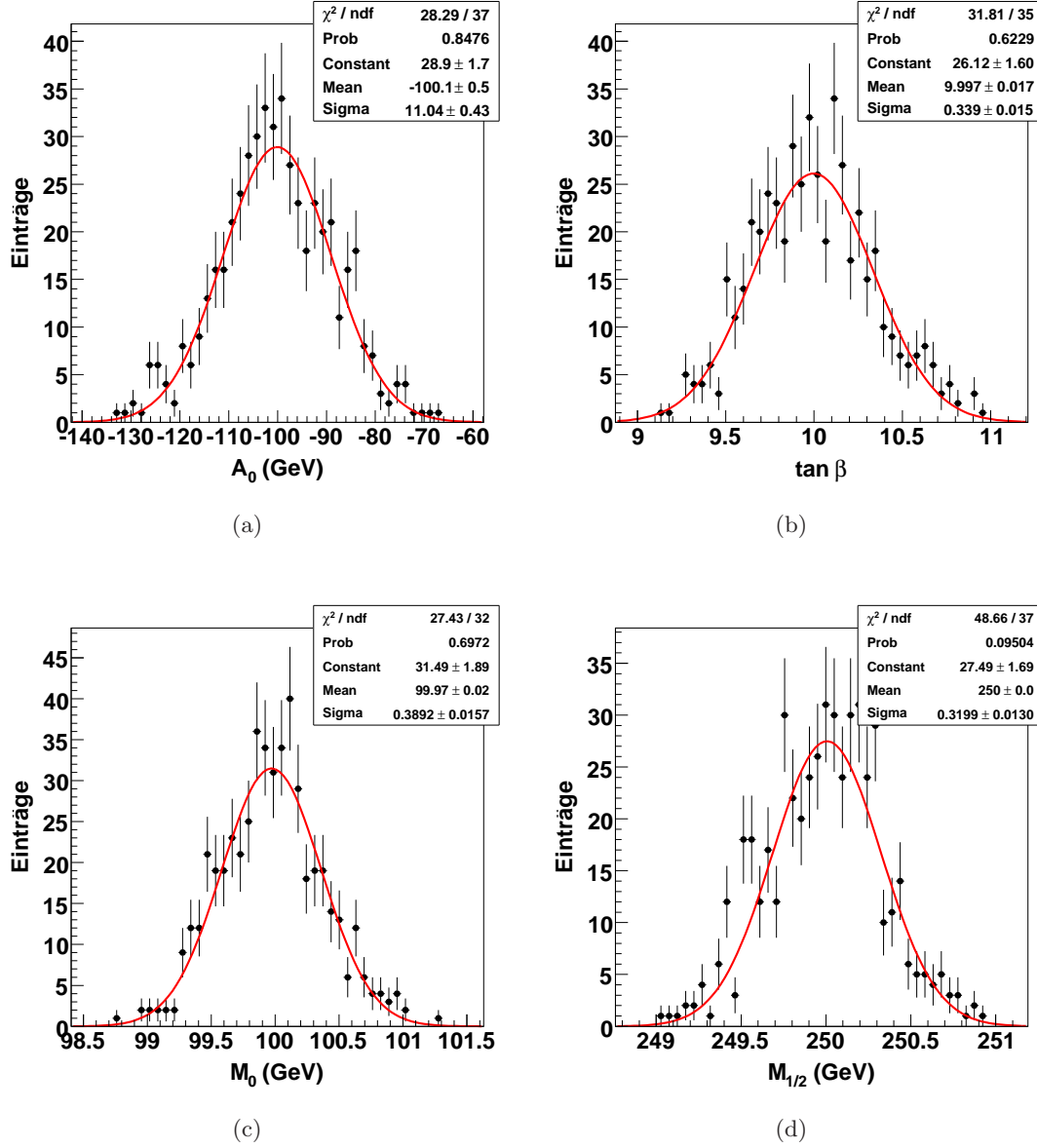




**Abbildung 5.4:** Verteilung der rekonstruierten Parameter aus einem Satz innerhalb ihrer Unsicherheiten gestreuten Observablen für  $1 \text{ fb}^{-1}$ . Deutlich sichtbar sind nichtlineare Effekte in den Verteilungen von  $A_0$  und  $\tan \beta$ . Dies ist auf die bei dieser Statistik noch großen Fehler auf die Observablen zurückzuführen.



**Abbildung 5.5:** Verteilung der rekonstruierten Parameter aus einem Satz innerhalb ihrer Unsicherheiten gestreuten Observablen für  $10 \text{ fb}^{-1}$ . Die Parameterwerte des Punktes SPS1a werden gut durch die Mittelwerte der an die Verteilungen angepassten Gauß-Funktion reproduziert. Der Fehler auf die rekonstruierten Parameter ist durch die Standardabweichung gegeben.



**Abbildung 5.6:** Verteilung der rekonstruierten Parameter aus einem Satz innerhalb ihrer Unsicherheiten gestreuten Observablen für 300 fb<sup>-1</sup>. Die Parameterwerte des Punktes SPS1a werden gut durch die Mittelwerte der an die Verteilungen angepassten Gauß-Funktion reproduziert. Der Fehler auf die rekonstruierten Parameter ist durch die Standardabweichung gegeben.

Der Grund für die vergleichsweise großen Unsicherheiten auf die rekonstruierten Werte von  $\tan \beta$  und  $A_0$  ist in der Auswahl der zur Verfügung stehenden Observablen zu suchen. Diese bestehen zum größten Teil aus Massenkanten bzw. Massendifferenzen und sind damit direkt sensitiv auf die Massenparameter  $M_0$  und  $M_{1/2}$ , während der Einfluss auf die anderen Parameter eher indirekter Natur ist.

Die Higgs-Masse ist sicherlich diejenige Observable mit der größten Sensitivität auf  $\tan \beta$ , tritt aber erst ab  $10 \text{ fb}^{-1}$  dem verwendeten Satz hinzu, was die starken Schwankungen dieses Parameters bei  $1 \text{ fb}^{-1}$  erklärt. Eine enge Verbindung besteht auch zwischen den Teilchen der dritten Generation und  $\tan \beta$  und  $A_0$  über die Nebendiagonalelemente ihrer Mischungs- bzw. Massenmatrizen. Als Beispiel sei die quadratische Massenmatrix im Stau-Sektor

$$\mathbf{M}_{\tilde{\tau}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\nu}_{\tau L}}^2 + m_{\tau}^2 + \Delta_{\tilde{e}_L} & m_{\tau}(A_0 - \mu \tan \beta) \\ m_{\tau}(A_0 - \mu \tan \beta) & m_{\tilde{\tau}_R}^2 + m_{\tau}^2 + \Delta_{\tilde{e}_R} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

mit

$$\Delta_{\tilde{e}_L} = \left( -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right) m_Z^2 \cos 2\beta \quad (5.6)$$

und

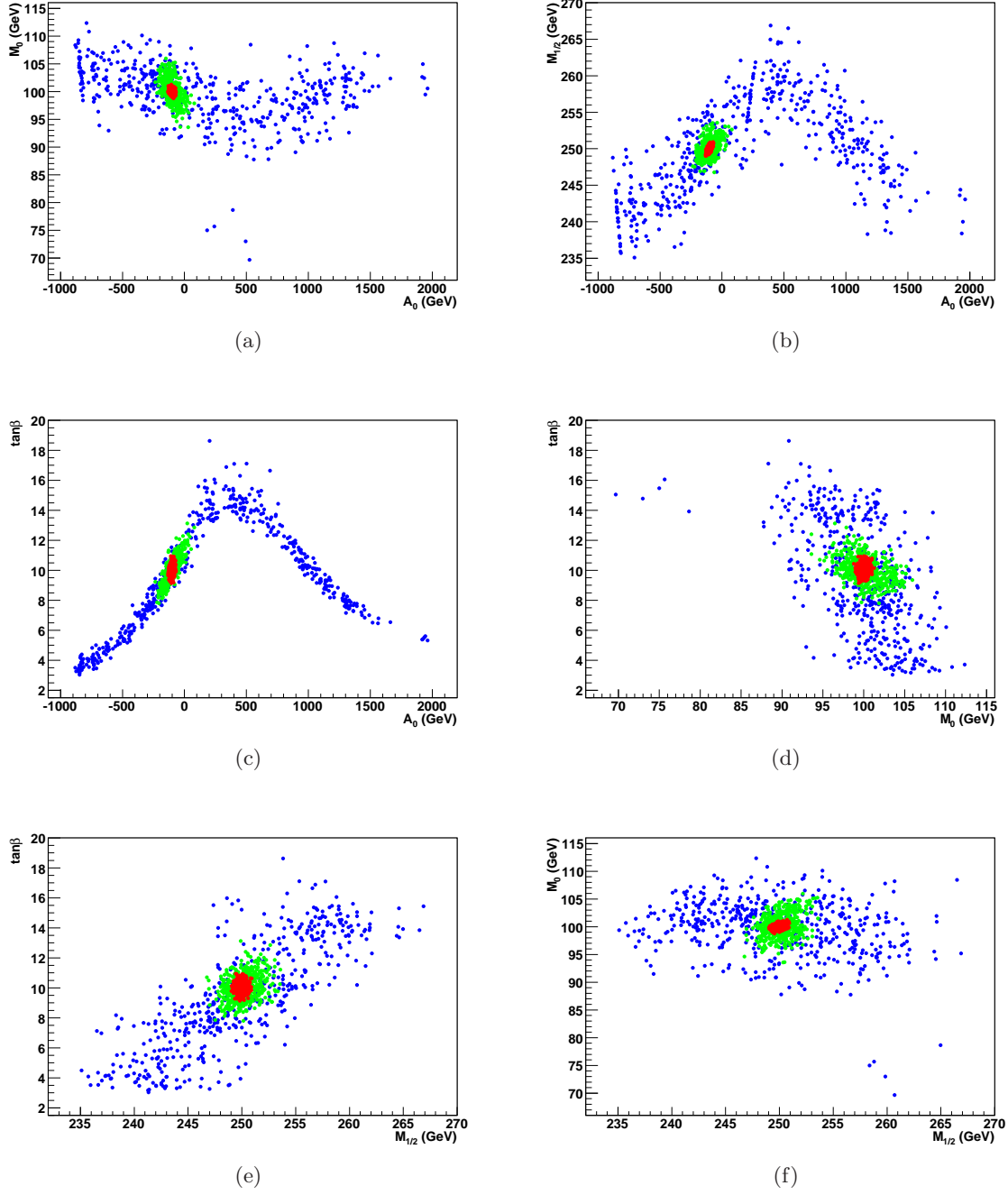
$$\Delta_{\tilde{e}_R} = \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W m_Z^2 \cos 2\beta \quad (5.7)$$

genannt. Weitere Observable, welche Bestandteile der dritten Generation enthalten, sind die Massenkante  $m_{\tau\tau}$ , das Verhältnis der Zerfälle des  $\tilde{\chi}_2^0$  in Staus zu denen in Selektrenen bzw. Smyonen und die Sbottom-Massen. Insgesamt sind diese jedoch gegenüber den anderen Observablen eindeutig in der Unterzahl und können dem Parameterraum keine ähnlich starken Beschränkungen auferlegen.

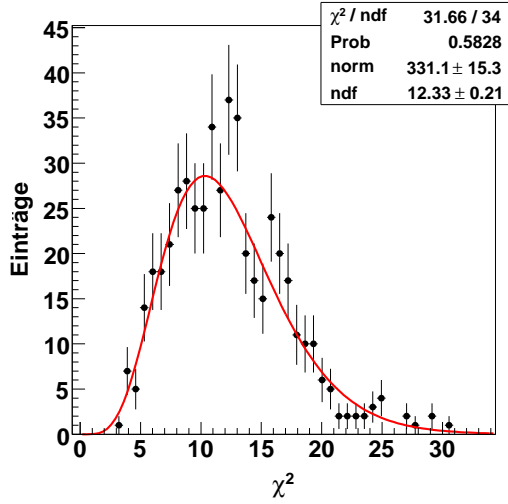
Einen etwas umfassenderen Blick liefern die Verteilungen der rekonstruierten Parameterwerte in den zweidimensionalen Projektionen auf die von Parameterpaaren aufgespannten Unterräume, wie sie in Abbildung 5.7 gezeigt sind. Um besser vergleichen zu können, wurden die Verteilungen für die anderen Luminositäten in dieselben Diagramme eingetragen. Hier ist klar erkennbar, dass die Parameterwerte im Bereich kleiner Fehler Ellipsen bilden, aber auch die Verteilungen für  $M_0$  und  $M_{1/2}$  haben für  $1 \text{ fb}^{-1}$  noch annähernd eine elliptische Form. Im Gegensatz dazu legen die Verteilungen von  $\tan \beta$  und  $A_0$ , insbesondere in der Projektion auf den gemeinsam aufgespannten Unterraum, ein sichtbar nichtlineares Verhalten an den Tag. Die Projektion wiederum auf den eindimensionalen Parameterraum ergibt eine Verteilung wie in 5.4.

Die Verteilungen der für jeden Fit erhaltenen  $\chi^2$ -Werte werden für alle Luminositäten in Abbildung 5.8 gezeigt. Eine an die Daten angepasste Funktion der Form (5.4) wird gut repräsentiert, ein Hinweis auf stabile Konvergenz in das jeweilige Funktionsminimum. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Optimierungsproblems ist ein Parameter der theoretischen Verteilung und wird korrekt reproduziert.

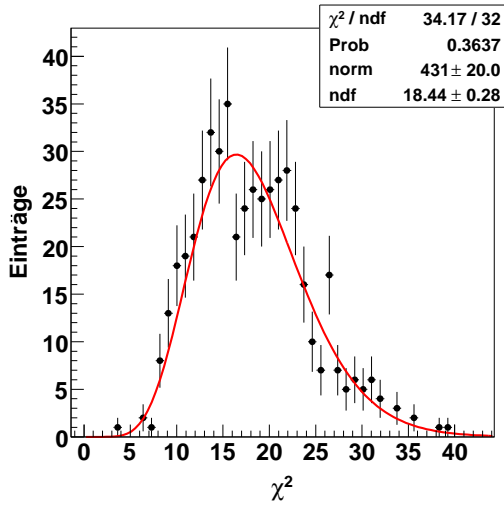
Die Verteilungen der rekonstruierten Parameter sind noch einmal in den Abbildungen 5.9 und 5.10 zu sehen, diesmal für alle Luminositäten nach Parametern getrennt in ein Diagramm eingetragen. Man sieht hier im Besonderen die relative Zunahme der Präzision auf die rekonstruierten Parameter mit zunehmender Statistik. Die Werte und Fehler aller rekonstruierten Parameter sind in Tabelle 5.3 zusammengefasst. In Tabelle 5.4 finden sich schließlich die Korrelationskoeffizienten der erhaltenen Parameterverteilung.



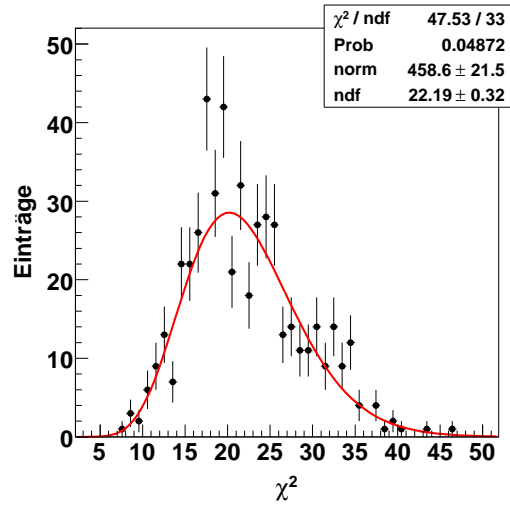
**Abbildung 5.7:** Projektionen der Verteilungen der rekonstruierten Parameterwerte aus LHC-Observablen auf alle durch Parameterkombinationen aufgespannte zweidimensionale Unterräume für 1 fb<sup>-1</sup> (blaue Punkte), 10 fb<sup>-1</sup> (grüne Punkte) und 300 fb<sup>-1</sup> (rote Punkte). Man sieht zum einen die erwartete Einschränkung des erlaubten Parameterraumes für zunehmende Luminosität. Insbesondere in (a)-(c) wird der nichtlineare Charakter der Abbildung des Observablenraumes auf den Parameterraum aufgrund der größeren Observablenunsicherheiten bei niedrigen Luminositäten deutlich.



(a)

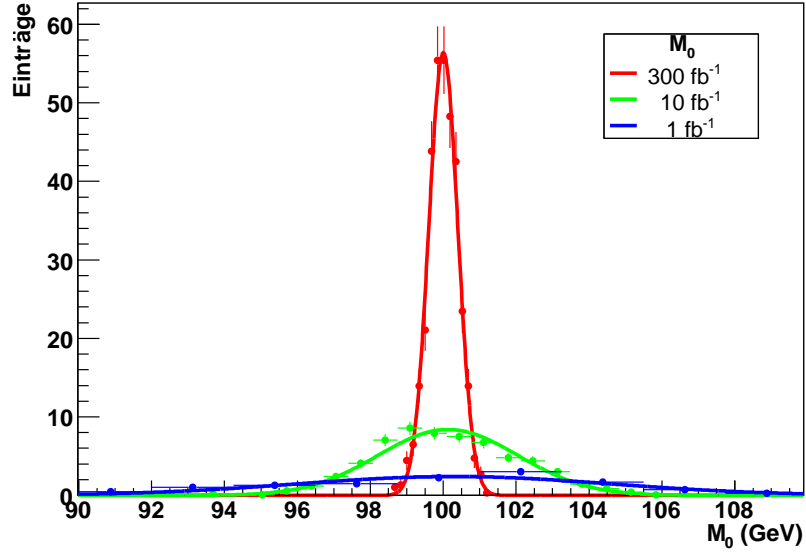


(b)

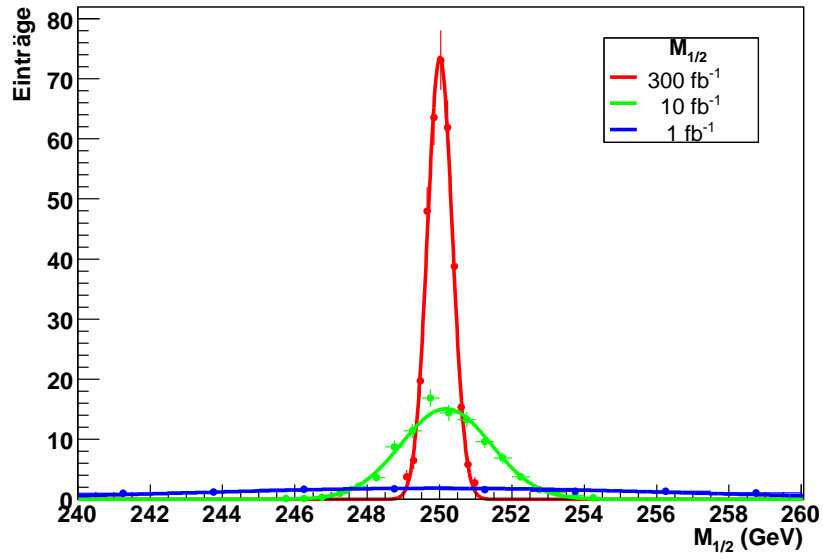


(c)

**Abbildung 5.8:** Verteilung der  $\chi^2$ -Werte der Fits mit gestreuten Observablen für  $1 \text{ fb}^{-1}$ ,  $10 \text{ fb}^{-1}$  und  $300 \text{ fb}^{-1}$ . Die in rot gezeichnete theoretische Erwartung wird gut durch die Daten repräsentiert. Die tatsächliche Anzahl der Freiheitsgrade (ndf) wird innerhalb akzeptabler Fehler reproduziert. Die erhaltenen Werte sind mit  $\text{ndf} = 13$  für  $1 \text{ fb}^{-1}$ ,  $\text{ndf} = 18$  für  $10 \text{ fb}^{-1}$  sowie  $\text{ndf} = 22$  für  $\text{fb}^{-1}$  zu vergleichen.

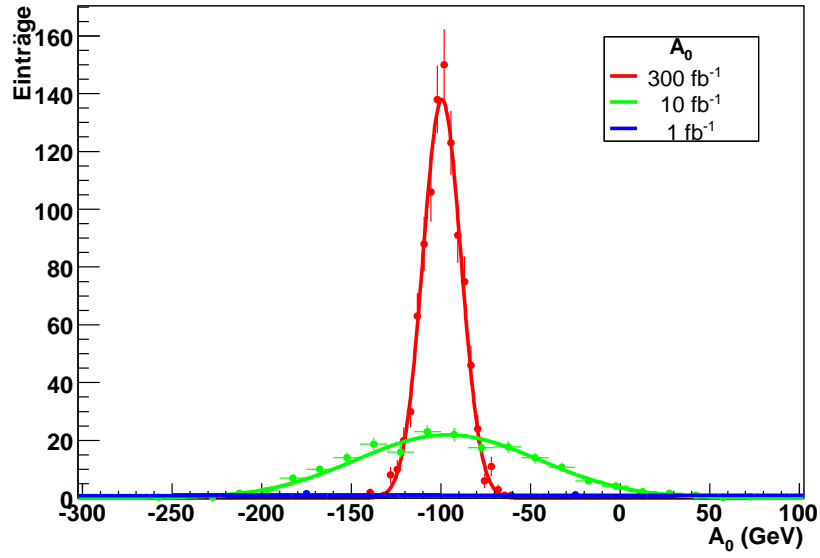


(a)

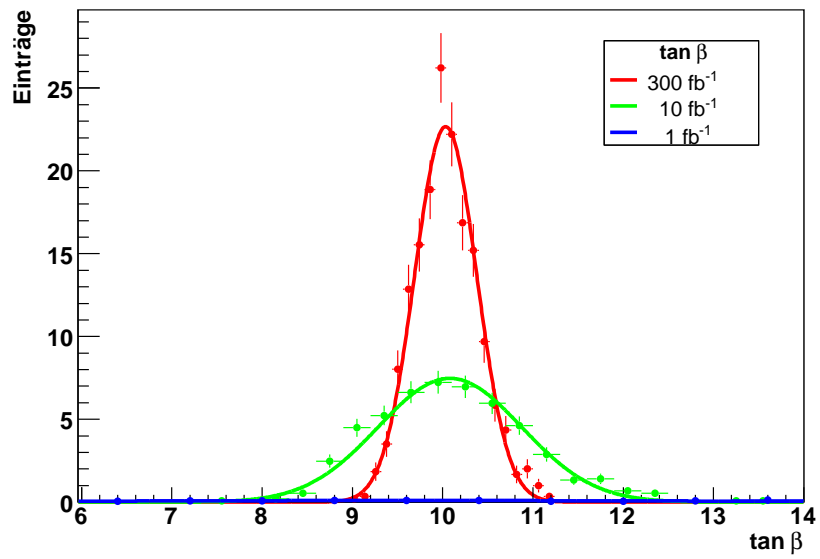


(b)

**Abbildung 5.9:** Ergebnisse der Parameterrekonstruktion des mSUGRA-Punktes SPS1a für  $1 \text{ fb}^{-1}$ ,  $10 \text{ fb}^{-1}$  und  $300 \text{ fb}^{-1}$  für die Parameter  $M_0$  und  $M_{1/2}$ .



(a)



(b)

**Abbildung 5.10:** Ergebnisse der Parameterrekonstruktion des mSUGRA-Punktes SPS1a für  $1 \text{ fb}^{-1}$ ,  $10 \text{ fb}^{-1}$  und  $300 \text{ fb}^{-1}$  für die Parameter  $A_0$  und  $\tan \beta$ .



Parameter	Zentralwert	Absolute Unsicherheit	Relative Unsicherheit
$M_0$	100.0 GeV	4.6 GeV	4.6%
$M_{1/2}$	250.2 GeV	7.0 GeV	2.8%
$A_0$	200 GeV (am)	680 GeV (rms)	340%
$\tan \beta$	9.5 (am)	3.5 (rms)	36.8%
$\int \mathcal{L} dt = 1 \text{ fb}^{-1}$ , $\chi^2$ : $12.33 \pm 0.21$ , 13 erwartet			

Parameter	Zentralwert	Absolute Unsicherheit	Relative Unsicherheit
$M_0$	100.3 GeV	2.1 GeV	2.1%
$M_{1/2}$	250.2 GeV	1.2 GeV	0.5%
$A_0$	-100.8 GeV	50.6 GeV	50.2%
$\tan \beta$	10.0	0.8	8%
$\int \mathcal{L} dt = 10 \text{ fb}^{-1}$ , $\chi^2$ : $18.44 \pm 0.28$ , 18 erwartet			

Parameter	Zentralwert	Absolute Unsicherheit	Relative Unsicherheit
$M_0$	100.0 GeV	0.4 GeV	0.4%
$M_{1/2}$	250.0 GeV	0.3 GeV	0.1%
$A_0$	-100.1 GeV	11.0 GeV	11.0%
$\tan \beta$	10.0	0.3	3%
$\int \mathcal{L} dt = 300 \text{ fb}^{-1}$ , $\chi^2$ : $22.19 \pm 0.32$ , 22 erwartet			

**Tabelle 5.3:** Ergebnis der Rekonstruktion der mSUGRA-Parameter in dem Punkt SPS1a für  $1 \text{ fb}^{-1}$ ,  $10 \text{ fb}^{-1}$  und  $300 \text{ fb}^{-1}$  mit gestreuten Observablen. Der Zentralwert ergibt sich aus dem Mittelwert einer an die erhaltene Parameterverteilung angepassten Gauß-Funktion, die Unsicherheiten aus deren Standardabweichung. Für  $1 \text{ fb}^{-1}$  ist die Parameterverteilung für  $A_0$  und  $\tan \beta$  nicht gaußförmig und der Zentralwert ist durch das arithmetische Mittel (am), die Unsicherheit durch den RMS-Wert (rms) gegeben.

$\int \mathcal{L} dt = 1 \text{ fb}^{-1}$				
	$M_0$	$M_{1/2}$	$A_0$	$\tan \beta$
$M_0$	1.000(0.000)	-0.249(0.042)	-0.299(0.041)	-0.563(0.031)
$M_{1/2}$	-0.249(0.042)	1.000(0.000)	0.358(0.039)	0.809(0.015)
$A_0$	-0.299(0.041)	0.358(0.039)	1.000(0.000)	0.435(0.036)
$\tan \beta$	-0.563(0.031)	0.809(0.015)	0.435(0.036)	1.000(0.000)

$\int \mathcal{L} dt = 10 \text{ fb}^{-1}$				
	$M_0$	$M_{1/2}$	$A_0$	$\tan \beta$
$M_0$	1.000(0.000)	0.310(0.040)	-0.528(0.032)	-0.432(0.036)
$M_{1/2}$	0.310(0.040)	1.000(0.000)	0.470(0.035)	0.331(0.040)
$A_0$	-0.528(0.032)	0.470(0.035)	1.000(0.000)	0.830(0.014)
$\tan \beta$	-0.432(0.036)	0.331(0.040)	0.830(0.014)	1.000(0.000)

$\int \mathcal{L} dt = 300 \text{ fb}^{-1}$				
	$M_0$	$M_{1/2}$	$A_0$	$\tan \beta$
$M_0$	1.000(0.000)	0.346(0.039)	-0.283(0.041)	0.182(0.043)
$M_{1/2}$	0.346(0.039)	1.000(0.000)	0.698(0.023)	0.083(0.044)
$A_0$	-0.283(0.041)	0.698(0.023)	1.000(0.000)	0.280(0.041)
$\tan \beta$	0.182(0.043)	0.083(0.044)	0.280(0.041)	1.000(0.000)

**Tabelle 5.4:** Korrelationskoeffizienten (mit Unsicherheiten) der rekonstruierten Parameterverteilungen für  $1 \text{ fb}^{-1}$ ,  $10 \text{ fb}^{-1}$  und  $300 \text{ fb}^{-1}$ .

### 5.3 Likelihood-Karten

Zur Erstellung einer Likelihood-Karte wird Simulated Annealing und die Observablenstreuung abgestellt, die übrigen Optionen bleiben unverändert. Hinzu kommt

```
UseMarkovChains          on
MaxMarkovChain           20000
```

wobei dem Parameterraum die Anzahl von `MaxMarkovChain` Stichproben entnommen und in ein Histogramm eingetragen werden. Die Markov-Kette beginnt bei den in der Eingabedatei angegebenen Startwerten für die Parameter. Deren Unsicherheiten gehen in die Standardabweichungen der Vorschlagsfunktion  $Q$  ein und bleiben unverändert. Diese können beliebig gewählt werden und liegen im Bereich von 1% auf die Werte von  $M_0$  und  $M_{1/2}$  und 10% auf  $A_0$  und  $\tan\beta$  für  $300 \text{ fb}^{-1}$ , im Bereich von 5% auf  $M_0$  und  $M_{1/2}$  und 10% auf  $A_0$  und  $\tan\beta$  für  $10 \text{ fb}^{-1}$  und im Bereich von 10% auf  $M_0$ ,  $M_{1/2}$  und  $\tan\beta$  und 50% auf  $A_0$  für  $1 \text{ fb}^{-1}$ . Da der Algorithmus mit der Entnahme von Stichproben in der Nähe der Startparameter beginnt, ist die anfängliche Parameterverteilung nicht von diesen unabhängig, man spricht auch von der sogenannten „burn-in“-Phase. Erst nach einer gewissen Anzahl von Iterationsschritten ist der Anfangszustand „vergessen“ und die Verteilung der entnommenen Parametersätze nimmt für jeden Startpunkt die gleiche Form an. Aus diesem Grund werden hier die ersten 2000 entnommenen Stichproben verworfen.

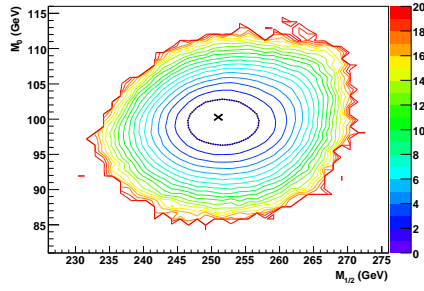
Die auf diese Weise erhaltenen Likelihood-Karten sind in den Abbildungen 5.11 bis 5.13 dargestellt. Jede Abbildung zeigt die entsprechenden Karten für eine bestimmte Parameterkombination und die verschiedenen Luminositäten zur besseren Vergleichbarkeit im selben Parameterbereich, um die Entwicklung des Bereichs der wahrscheinlichsten Parametersätze nachvollziehen zu können. Die Skala der z-Achse in den Histogrammen kann willkürlich gewählt werden, da nur die relativen Höhenunterschiede, kodiert durch die Farbgebung, von Bedeutung sind.

Zur Interpretation der Karten muss beachtet werden, dass bei der Betrachtung der Häufigkeiten in der von zwei Parametern aufgespannten Projektionsebene über die Häufigkeiten in den übrigen Parameterdimensionen integriert wird. Dies bedeutet, dass der Schwerpunkt nicht-gaußischer Verteilungen, wie sie nach dem bisher Gesagten insbesondere bei den Parametern  $A_0$  und  $\tan\beta$  im Falle niedriger Luminositäten auftreten, in der Projektion nicht zwangsläufig auch genau der Wert des jeweiligen Parameters in dem wahrscheinlichsten Parametersatz ist. Dieser Effekt reduziert sich mit zunehmend gaußischer Verteilung der Häufigkeiten.

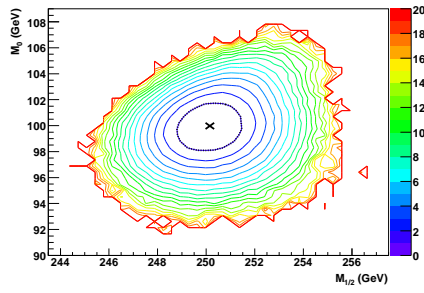
Beim Vergleich der Likelihood-Karten ist festzustellen, dass der Bereich der wahrscheinlichen Parameterkombinationen bei  $300 \text{ fb}^{-1}$  erwartungsgemäß deutlich gegenüber den Verteilungen bei den niedrigeren Luminositäten  $10 \text{ fb}^{-1}$  und  $1 \text{ fb}^{-1}$  um die nominellen SPS1a-Werte eingeschränkt und zudem elliptischer ist.

### 5.4 Hypothesenüberprüfung für $\text{sign}\mu$

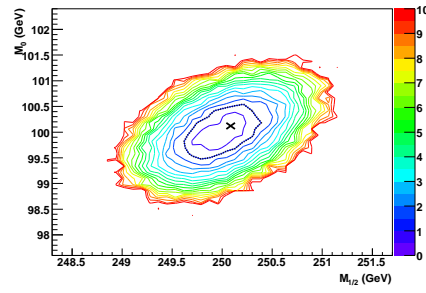
In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob und, wenn ja, wie gut sich Annahmen über das Vorzeichen des Higgs-Massenparameters  $\text{sign}\mu$  mit Hilfe der Parameterrekonstruktion ausweisen lassen. Dazu werden zwei identische Verteilungen von gestreuten Observablensätzen um Zentralwerte, die für positives  $\text{sign}\mu$  von SPHENO berechnet wurden, erzeugt und die Rekonstruktion einmal wie gehabt mit fix gesetztem positiven Vorzeichen und ein weiteres Mal mit negativem Vorzeichen, also mit



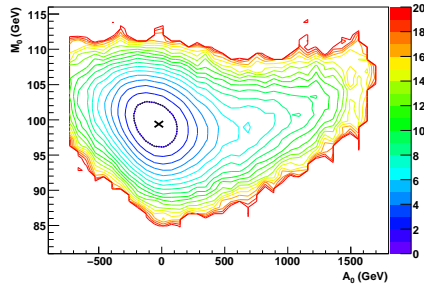
(a)



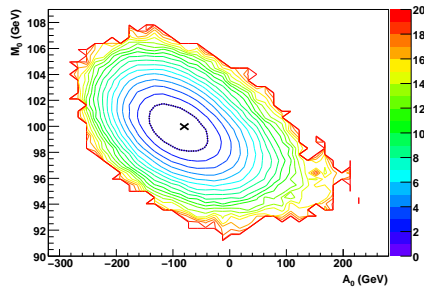
(b)



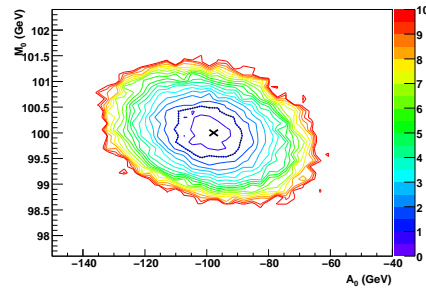
(c)



(d)

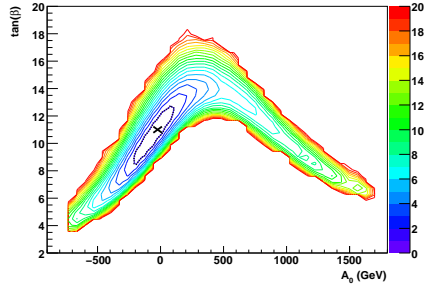


(e)

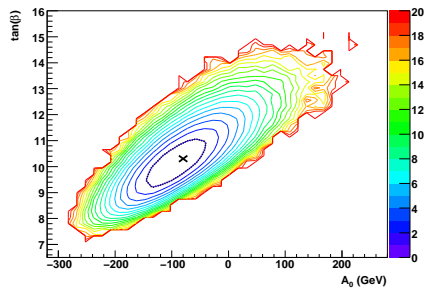


(f)

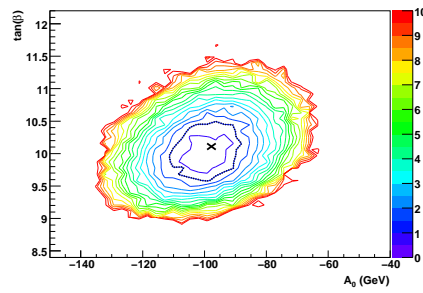
**Abbildung 5.11:** Likelihood-Karten der mSUGRA-Parameter. Dargestellt sind die Projektionen auf die  $M_0$ - $M_{1/2}$ -Ebene und die  $M_0$ - $A_0$ -Ebene für  $1 \text{ fb}^{-1}$  (a),(d),  $10 \text{ fb}^{-1}$  (b),(e) und  $300 \text{ fb}^{-1}$  (c),(f).



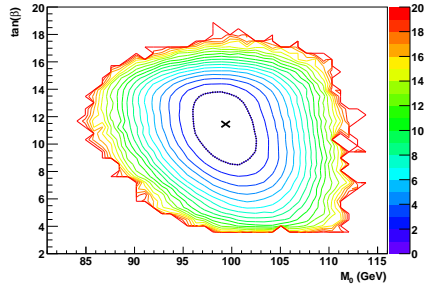
(a)



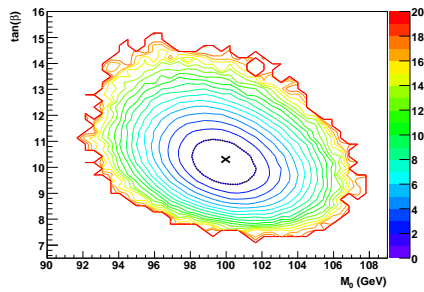
(b)



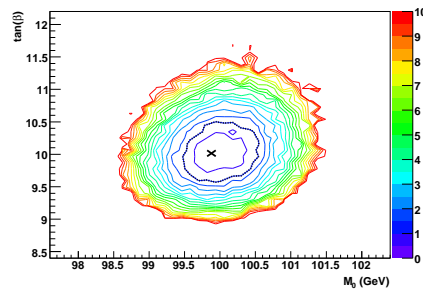
(c)



(d)

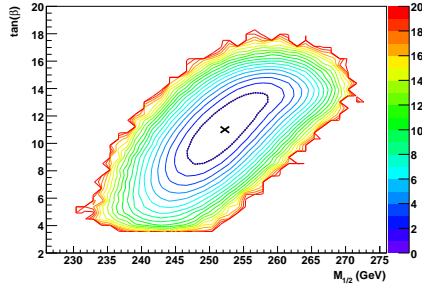


(e)

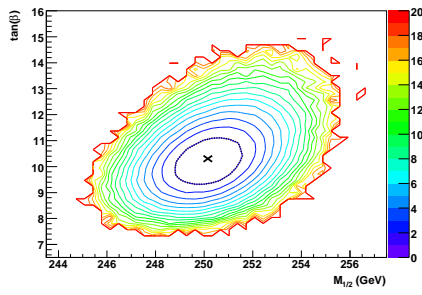


(f)

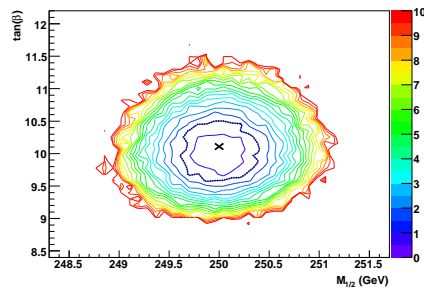
**Abbildung 5.12:** Likelihood-Karten der mSUGRA-Parameter. Dargestellt sind die Projektionen auf die  $\tan\beta$ - $A_0$ -Ebene und die  $\tan\beta$ - $M_0$ -Ebene für  $1 \text{ fb}^{-1}$  (a),(d),  $10 \text{ fb}^{-1}$  (b),(e) und  $300 \text{ fb}^{-1}$  (c),(f).



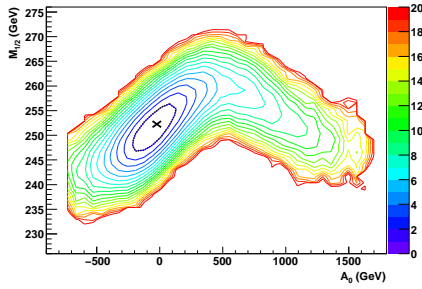
(a)



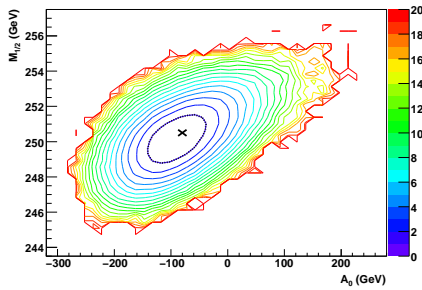
(b)



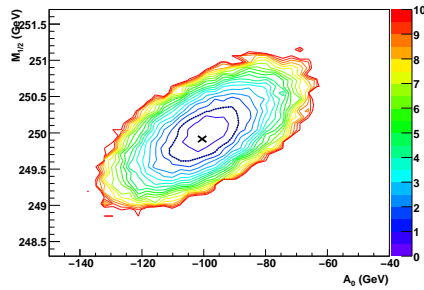
(c)



(d)



(e)



(f)

**Abbildung 5.13:** Likelihood-Karten der mSUGRA-Parameter. Dargestellt sind die Projektionen auf die  $\tan\beta$ - $M_{1/2}$ -Ebene und die  $M_{1/2}$ - $A_0$ -Ebene für  $1 \text{ fb}^{-1}$  (a),(d),  $10 \text{ fb}^{-1}$  (b),(e) und  $300 \text{ fb}^{-1}$  (c),(f).

`fixParameter SignMu -1`

durchgeführt. Die erhaltenen Verteilungen der  $\chi^2$ -Werte werden dann in einem Histogramm gegeneinander aufgetragen, wie es in der Abbildung 5.14 gezeigt ist. Falls die verfügbaren Observablen keinerlei Rückschlüsse auf das zugrunde liegende Modell zulassen, so würden sich die  $\chi^2$ -Werte genau entlang der Identitätslinie anordnen. Unter der Voraussetzung jedoch, dass eine falsche Modellannahme ein im Mittel höheres  $\chi^2$  zur Folge hat, ist zu erwarten, dass sich der Schwerpunkt der Gesamtverteilung entsprechend von der Identitätslinie weg verlagert. Die Wahrscheinlichkeit, dass das falsche Modell gegenüber dem richtigen bevorzugt wird, ergibt sich wie folgt. Mit  $\chi_{1,i}^2$  und  $\chi_{2,j}^2$  sollen die einzelnen  $\chi^2$ -Werte der beiden Verteilungen  $\chi_1^2$  und  $\chi_2^2$  zu den Observablensätzen  $i$  und  $j$  bezeichnet werden, von denen  $\chi_1^2$  auf der x-Achse des Diagramms aufgetragen werden soll. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P$  ergibt sich aus dem Verhältnis

$$P = \frac{N(\chi_{1,i}^2 > \chi_{2,j}^2, \chi_{2,j}^2)}{N_{\text{gesamt}}}, \quad (5.8)$$

der Anzahl der Wertepaare  $N(\chi_{1,i}^2 > \chi_{2,j}^2, \chi_{2,j}^2)$  bei denen  $\chi_{1,i}^2 > \chi_{2,j}^2$  ist und der Gesamtzahl  $N_{\text{gesamt}}$  der Fits, hier also  $N_{\text{gesamt}} = 500$ . Der Fehler auf die Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Binomialverteilung zu

$$\sigma = \sqrt{P(1-P)/N} \quad (5.9)$$

Es wird im Falle von  $1 \text{ fb}^{-1}$  eine Wahrscheinlichkeit von  $P = 4.6\% \pm 0.9\%$  für die Bevorzugung des falschen Modells erhalten, wobei  $N = 500$  eingesetzt wurde. Bei den höheren Luminositäten kann das falsche Modell vollständig diskriminiert werden.

## 5.5 Fit mit Niederenergieobservablen

Die Rekonstruktion des mSUGRA-Parameterpunktes SPS1a soll nun für  $1 \text{ fb}^{-1}$  unter Einbeziehung einer Reihe von weiteren Observablen durchgeführt werden, die sich bereits bei niedrigen Energien messen lassen, aber dennoch eine gewisse Sensitivität auf Prozesse neuer Physik aufweisen. Zur Berechnung der Zentralwerte dieser Niederenergieobservablen in Abhängigkeit von den Modellparametern ist das Programm NPFitter [19] über die SLHA-Schnittstelle in Fittino eingebunden. Dies geschieht durch den Eintrag

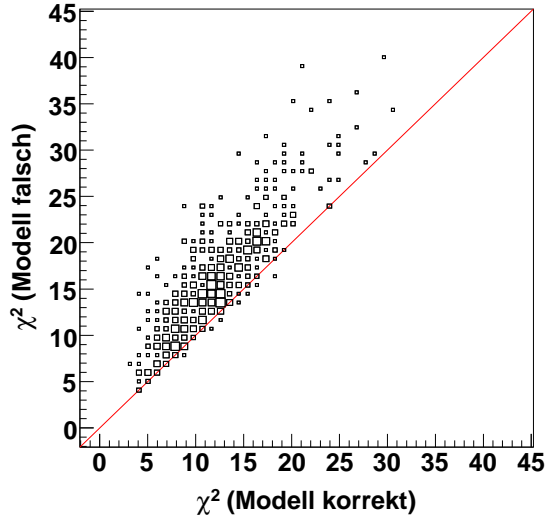
`LEOBSCALCULATOR NPFitter <path>`

in der Fittino-Eingabedatei, wobei mit `<path>` der Pfad zu der ausführbaren Datei spezifiziert wird. Die Niederenergieobservable sind im Einzelnen

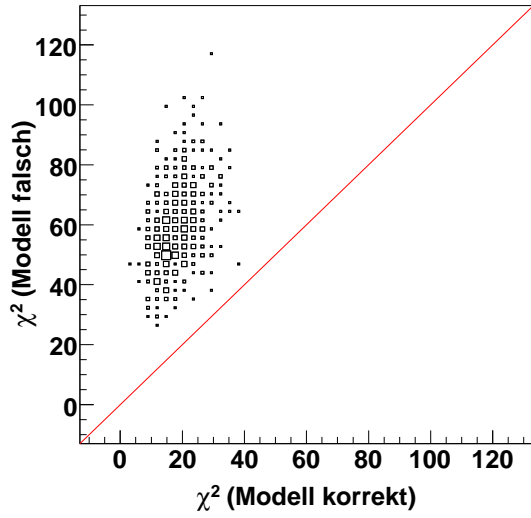
- Die totale Breite  $\Gamma_Z$  der  $Z^0$ -Resonanz
- Der hadronische Pol-Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_0^h = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{\text{had}}}{\Gamma_Z^2} \quad (5.10)$$

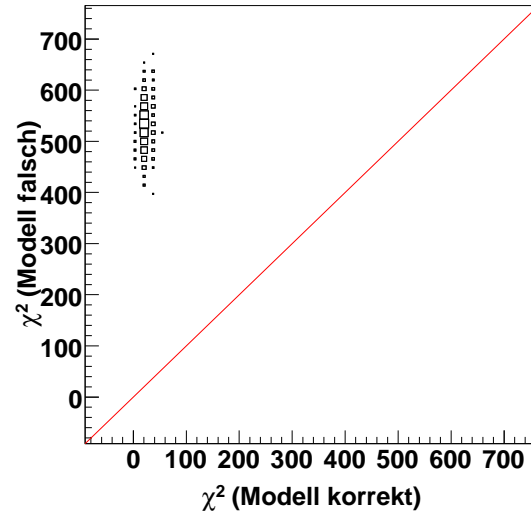
mit den partiellen Zerfallsbreiten  $\Gamma_{ee}$  und  $\Gamma_{\text{had}}$  des  $Z^0$  in Elektronen und Hadronen



(a)



(b)



(c)

**Abbildung 5.14:** Streudiagramm der erhaltenen  $\chi^2$ -Verteilungen für  $\text{sign}\mu = 1$  (Modell richtig) und  $\text{sign}\mu = -1$  (Modell falsch). Eine falsche Modellannahme führt im Mittel zu einem höheren  $\chi^2$ -Wert. Selbst bei niedrigen Luminositäten kann das nicht favourisierte Modell zu 96% ausgeschlossen werden.

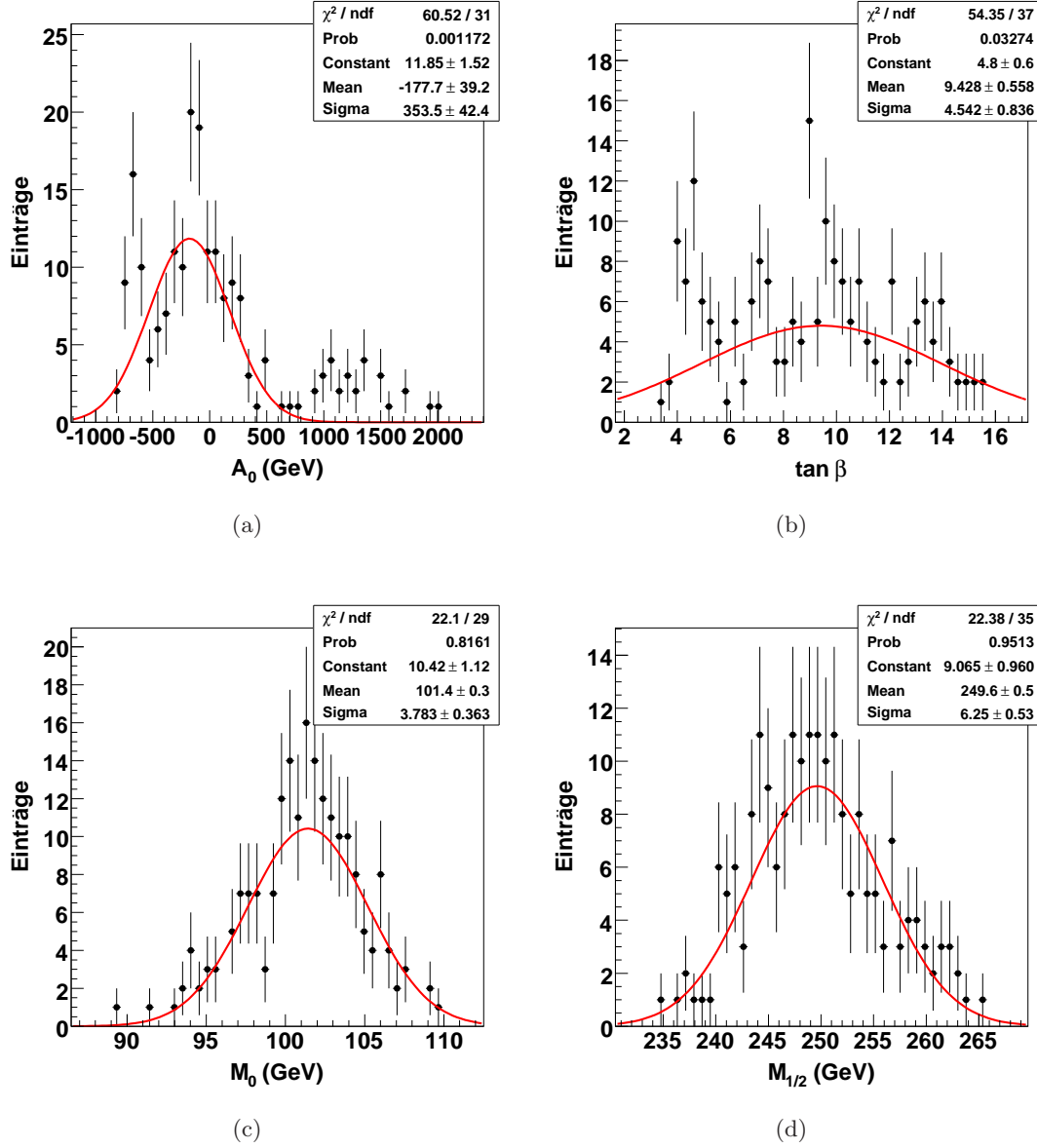


- Das Verhältnis aus hadronischer und leptonischer Breite am  $Z^0$ -Pol  $R_\ell = \Gamma_{\text{had}}/\Gamma_{\ell\ell}$
- Die Verhältnisse aus den Partialbreiten des  $Z^0$  in bottom- bzw. charm-Quarks und der hadronischen Breite  $R_b = \Gamma_{b\bar{b}}/\Gamma_{\text{had}}$  bzw.  $R_c = \Gamma_{c\bar{c}}/\Gamma_{\text{had}}$
- Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien der Zerfälle des  $Z^0$  in geladene Leptonen, bottom-Quarks und charm-Quarks  $A_{\text{FB}}^\ell$ ,  $A_{\text{FB}}^b$  und  $A_{\text{FB}}^c$
- Die effektive Kopplung für Leptonen, bottom- und charm-Quarks  $A_\ell(\text{SLD})$ ,  $A_\ell(P_\tau)$ ,  $A_b$  und  $A_c$
- Der effektive leptonische schwache Mischungswinkel  $\sin^2(\theta_{\text{eff}}^{\text{lept}})$
- Die Reliktdichte der Dunklen Materie  $\Omega h^2$
- Die Verzweigungsverhältnisse  $\text{BR}(b \rightarrow s\gamma)$ ,  $\text{BR}(B_u \rightarrow \tau\nu_\tau)$ ,  $\text{BR}(B_s \rightarrow Xs\ell\ell)$ ,  $\text{BR}(B_d \rightarrow \ell\ell)$ ,  $\text{BR}(K \rightarrow \tau\nu_\tau)$ ,  $\text{BR}(Kp \rightarrow \pi nn)$  bzw. deren im Folgenden mit  $R(\text{BR})$  gekennzeichneten Verhältnisse  $\text{BR}^{\text{EXP}}/\text{BR}^{\text{SM}}$
- Die Massendifferenzen zwischen  $B_s^0$ ,  $B_d^0$ ,  $K^0$  und ihren Antiteilchen  $\Delta m_{B_s^0}$ ,  $\Delta m_{B_d^0}$  und  $\Delta m_{K^0}$  bzw. deren im Folgenden mit  $R(\Delta m)$  gekennzeichneten Verhältnisse  $\Delta m^{\text{SUSY}}/\Delta m^{\text{SM}}$  und das Verhältnis  $\Delta m_{B_s^0}/\Delta m_{B_d^0}$

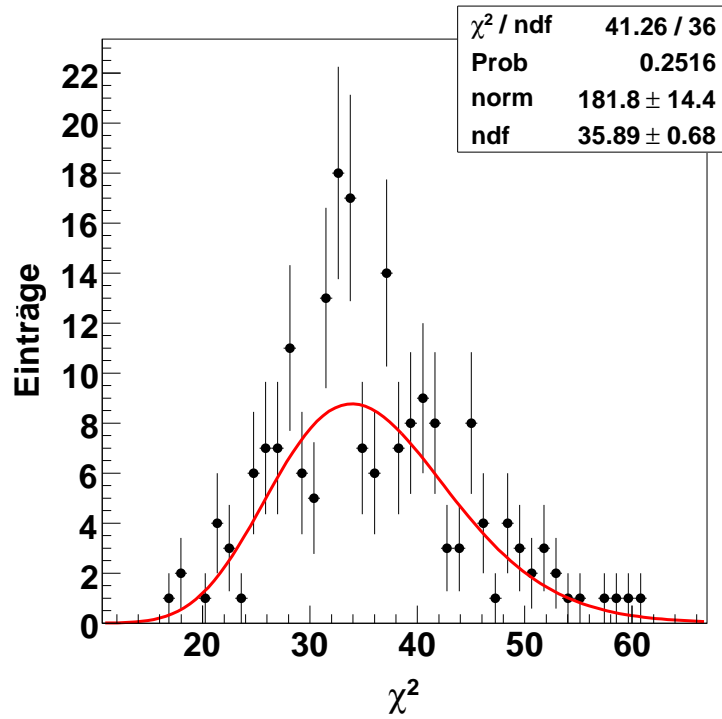
Ihre für den Punkt SPS1a erhaltenen Zentralwerte und Unsicherheiten sind in Tabelle 5.5 zusammengefasst, die erhaltenen Parameterverteilungen sind in den Abbildungen 5.15 und 5.17 zu sehen. Obwohl die Verteilungen hier aus lediglich 200 unabhängigen Fits bestehen, ist durch die Hinzunahme der Niederenergieparameter offenbar bereits eine leichte Einschränkung des in Frage kommenden Parameterraumes zu verzeichnen. Insbesondere für  $A_0$  ist eine deutliche Verbesserung der Rekonstruktion sichtbar.

observable	meas. value	constraint	theo. uncert.
$\alpha_{\text{em}}^{-1}$	127.925	$\pm 0.016$	
$\alpha_S$	0.1176	$\pm 0.0020$	
$G_F$ ( $\text{GeV}^{-2}$ )	$1.16637 \times 10^{-5}$	$\pm 0.00001 \times 10^{-5}$	
$m_Z$ (GeV)	91.1875	$\pm 0.0021$	
$m_W$ (GeV)	80.399	$\pm 0.025$	$\pm 0.010$
$m_c$ (GeV)	1.27	$\pm 0.11$	
$m_b$ (GeV)	4.20	$\pm 0.17$	
$m_t$ (GeV)	172.4	$\pm 1.2$	
$m_\tau$ (GeV)	1.77684	$\pm 0.00017$	
$m_h$ (GeV)	$> 114.4$		$\pm 3.0$
$\Gamma_Z$ (MeV)	2495.2	$\pm 2.3$	$\pm 1.0$
$\Delta a_\mu$	$30.2 \times 10^{-10}$	$\pm 8.8 \times 10^{-10}$	$\pm 2.0 \times 10^{-10}$
$\sigma_{\text{had}}^0$ (nb)	41.540	$\pm 0.037$	
$R_\ell$	20.767	$\pm 0.025$	
$R_b$	0.21629	$\pm 0.00066$	
$R_c$	0.1721	$\pm 0.003$	
$A_{\text{FB}}^\ell$	0.01714	$\pm 0.00095$	
$A_{\text{FB}}^b$	0.0992	$\pm 0.0016$	
$A_{\text{FB}}^c$	0.0707	$\pm 0.0035$	
$A_\ell(\text{SLD})$	0.1513	$\pm 0.0021$	
$A_\ell(P_\tau)$	0.1465	$\pm 0.0032$	
$A_b$	0.923	$\pm 0.020$	
$A_c$	0.670	$\pm 0.027$	
$\sin^2 \theta_W^\ell(Q_{\text{fb}})$	0.2324	$\pm 0.0012$	
$\Omega h^2$	0.1099	$\pm 0.0062$	$\pm 0.012$
$\text{BR}(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^-)$		$< 2.3 \times 10^{-8}$	$\pm 0.01 \times 10^{-9}$
$\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$		$< 4.7 \times 10^{-8}$	$\pm 0.02 \times 10^{-8}$
$R(b \rightarrow s\gamma)$	1.117	$\pm 0.076 \pm 0.082$	$\pm 0.050$
$R(B \rightarrow \tau\nu)$	1.15	$\pm 0.40$	
$R(B \rightarrow X_s \ell\ell)$	0.99	$\pm 0.32$	
$R(K \rightarrow \mu\nu)$	1.008	$\pm 0.014$	
$R(K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu})$		$< 4.5$	
$R(\Delta m_{B_s})$	1.11	$\pm 0.01$	$\pm 0.32$
$R(\Delta m_{B_s})/R(\Delta m_{B_d})$	1.09	$\pm 0.01$	$\pm 0.16$
$R(\Delta\epsilon_K)$	0.92	$\pm 0.14$	

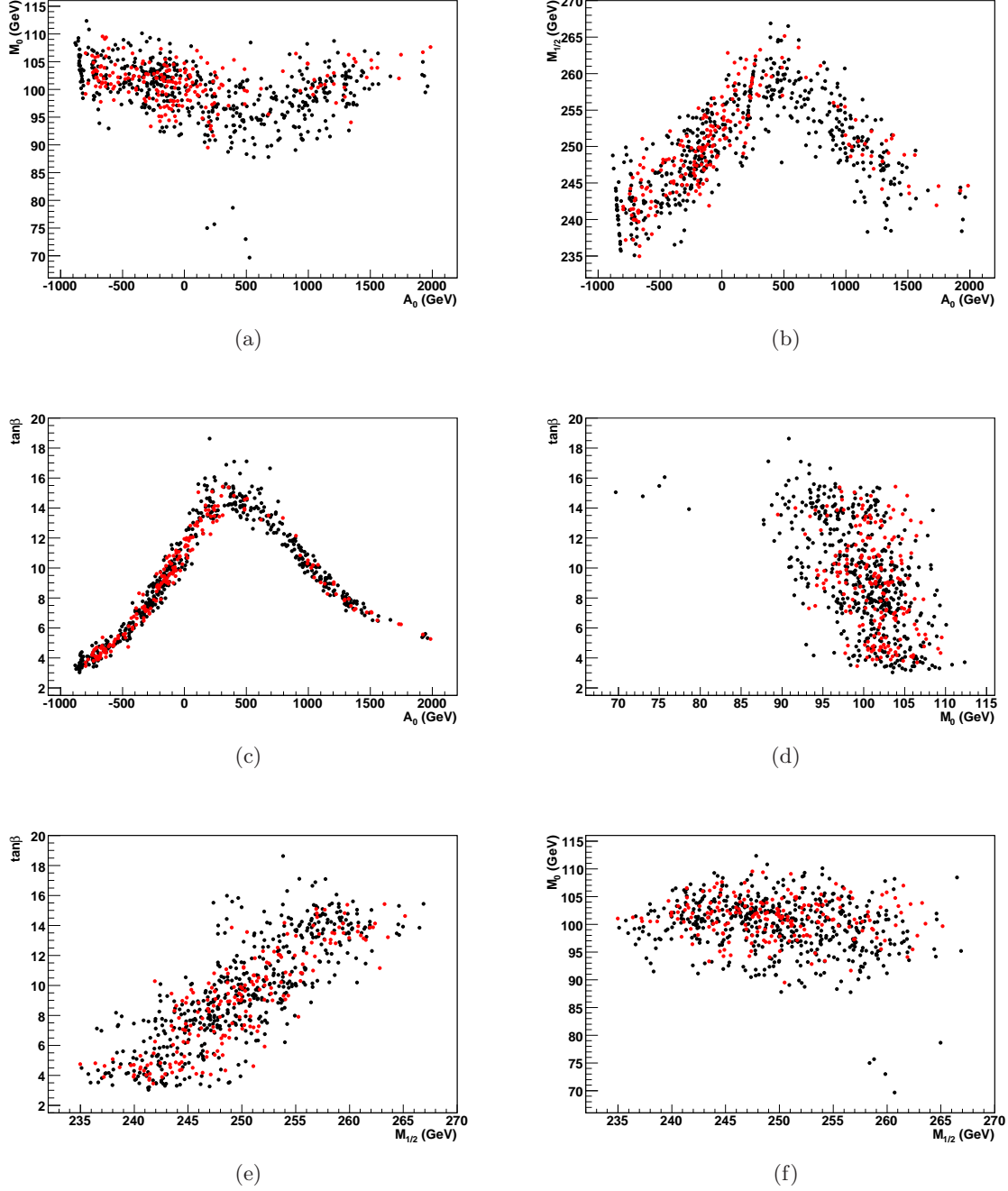
**Tabelle 5.5:** Satz aller für den Fit verwendeten Niederenergieobservablen. Die nominellen Werte wurden von NPFitter für SPS1a berechnet. Die Unsicherheiten auf die Messungen stammen aus [19], [4], [5] und [17], die Theoriefehler aus [19].



**Abbildung 5.15:** Verteilung der rekonstruierten Parameter aus einem kombinierten Satz innerhalb ihrer Unsicherheiten gestreuten LHC- und Niederenergieobservablen für  $1 \text{ fb}^{-1}$ . Im Vergleich zu den Verteilungen, die nur aus LHC-Observablen erhalten wurden, fällt insbesondere die deutliche Verbesserung der Rekonstruktion von  $A_0$  auf. Der etwas größere Fehler auf  $\tan \beta$  ist wohl auf die geringere Statistik zurückzuführen.



**Abbildung 5.16:** Verteilung der  $\chi^2$ -Werte der Fits mit gestreuten LHC- und Niederenergieobservablen für  $1 \text{ fb}^{-1}$ . Die in rot gezeichnete theoretische Erwartung wird gut durch die Daten repräsentiert. Die tatsächliche Anzahl der Freiheitsgrade (ndf) wird innerhalb akzeptabler Fehler reproduziert. Der erhaltene Wert ist mit  $\text{ndf} = 37$  zu vergleichen.



**Abbildung 5.17:** Projektionen der Verteilungen der rekonstruierten Parameterwerte aus LHC-Observablen (schwarze Punkte) und LHC- und Niederenergieobservablen (rote Punkte) für  $1 \text{ fb}^{-1}$ . Der Parameterraum wird durch die Hinzunahme der neuen Observablen bereits eingeschränkt.



# Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die freien Parameter der mSUGRA-Lagrange-Dichte aus einem Satz von erwarteten LHC-Messungen supersymmetrischer Prozesse für den Benchmark-Punkt SPS1a rekonstruiert.

Dazu wurde die Liste der von der verwendeten Rekonstruktions-Software Fittino unterstützen Observablen erweitert, welche die aktuellen Ergebnisse der vielen verfügbaren Analysestudien berücksichtigt. Eine neu implementierte Steuerungssyntax erlaubt zudem die komfortable und flexible Behandlung von Observablen mit korrelierten Fehleranteilen.

Um die Einschränkung des in Frage kommenden Parameterraums mit der Laufzeit der Experimente nachvollziehen zu können, wurde die Rekonstruktion für Sätze von Messungen und ihrer Präzision durchgeführt, welche verschiedene Stadien erreichter integrierter Luminosität widerspiegeln. Die Bestimmung der Unsicherheiten der rekonstruierten Parameter erfolgt auf der Grundlage von Monte-Carlo-Methoden.

Für  $10 \text{ fb}^{-1}$  und  $300 \text{ fb}^{-1}$  ist die erwartete Präzision auf die Observablen groß und die Abbildung in den Parameterraum ist durch ihren linearen Anteil dominiert. Die nominellen Zentralwerte der Parameter werden gut reproduziert und die relativen Unsicherheiten liegen für  $M_0$  und  $M_{1/2}$  bei  $10 \text{ fb}^{-1}$  im Bereich weniger Prozent. Bedingt durch die Auswahl der Observablen ist die Unsicherheit auf  $\tan\beta$  bei dieser Luminosität um eine Größenordnung höher und für  $A_0$  beträgt diese bereits etwa 50%. Für  $300 \text{ fb}^{-1}$  reduzieren sich die Unsicherheiten aller Parameter ungefähr um einen Faktor 4. Bei einer Luminosität von  $1 \text{ fb}^{-1}$  treten hingegen starke nichtlineare Effekte auf. Insbesondere die Verteilung der rekonstruierten Werte für  $\tan\beta$  und  $A_0$  zeigen deutliche Abweichungen von der Normalverteilung, das arithmetische Mittel der Werte für  $A_0$  ist sogar positiv.

Die erstellten Likelihood-Karten leisten eine anschauliche Darstellung der Bereiche wahrscheinlicher Parameterwerte und bestätigen und ergänzen den Blick auf die Entwicklung der Rekonstruktion mit zunehmender Luminosität.

Die aus dem Vergleich der Fits der Modelle mit dem richtigen und dem falschen Vorzeichen für den Massenparameter  $\mu$  erhaltenen  $\chi^2$ -Verteilungen lassen sich effektiv zur Hypothesenüberprüfung einsetzen. So lässt sich das falsche Modell bereits bei  $1 \text{ fb}^{-1}$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% verwerfen.

Schließlich wurde gezeigt, dass die Hinzunahme von Niederenergieobservablen zu einer spürbaren quantitativen und qualitativen Verbesserung der Rekonstruktion der Parameter, besonders aber von  $A_0$ , führt.

Insgesamt stimmen die erhaltenen Ergebnisse gut mit den Erwartungen überein und tragen zur Stärkung des Vertrauens in die eingesetzte Methode bei. Es bleibt nun abzuwarten, ob Supersymmetrie bereits mit dem baldigen Beginn der Messungen am LHC ihre Spuren in den Detektoren hinterlässt und was in diesem Fall aus der Rekonstruktion ihrer Parameter aus echten Daten über die Natur zu erfahren ist.





# Literaturverzeichnis

- [1] <http://spa.desy.de/spa>.
- [2] <http://www.gnu.org/licenses/gpl.html>.
- [3] <http://www.hep.ucl.ac.uk/atlas/atlfast/>.
- [4] <http://www.slac.stanford.edu/xorg/hfag/>.
- [5] <http://www.lnf.infn.it/wg/vus/>.
- [6] ATLAS detector and physics performance. Technical design report. 1999. CERN-LHCC-99-14 und CERN-LHCC-99-15.
- [7] I. J. R. Aitchison. Supersymmetry and the MSSM: An Elementary Introduction. 2005. arXiv:hep-ph/0505510v1.
- [8] U. Amaldi, W. de Boer, and H. Fierstenau. Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP. *Physics Letters B*, 260/3,4, 1991.
- [9] B. C. Allanach and C. G. Lester. Multi-Dimensional mSUGRA Likelihood Maps. *Physical Review D*, 73:015013, 2006.
- [10] P. Osland B. K. Gjelsten, D. J. Miller. Measurement of SUSY Masses via Cascade Decays for SPS1a. 2005. arxiv:hep-ph/0410303v2.
- [11] Howard Baer, Frank E. Paige, Serban D. Protopescu, and Xerxes Tata. Isajet 7.69: A monte carlo event generator for pp,  $\bar{p}p$ , and  $e^+e^-$  reactions, 2003.
- [12] R. J. Barlow. Statistics. 1999.
- [13] U. Baur et al. Theoretical and experimental status of the indirect Higgs boson mass determination in the standard model. 2001.
- [14] P. Bechtle, K. Desch, and P. Wienemann. Determination of MSSM Parameters from LHC and ILC Observables in a Global Fit. 2005. arXiv:hep-ph/0511006v2.
- [15] P. Bechtle, K. Desch, and P. Wienemann. Fittino, a program for determining MSSM parameters from collider observables using an iterative method. 2005. arXiv:hep-ph/0412012v2.
- [16] C. M. Bishop. Pattern Recognition and Machine Learning. 2006.
- [17] UTfit Collaboration: M. Bona, M. Ciuchini, E. Franco, V. Lubicz, G. Martinelli, F. Parodi, M. Pierini, P. Roudeau, C. Schiavi, L. Silvestrini, V. Sordini, A. Stocchi, and V. Vagnoni. Model-independent constraints on delta f=2 operators and the scale of new physics, 2007.

- [18] I. Borjanovic, I. Efthymiopoulos, F. Fassi, P. Grenier, P. Homola, V. Kostioukhine, R. Leitner, I. Mendas, D. Pallin, D. Popovic, P. Roy, V. Simak, L. Simic, G. Skoro, and J. Valenta. Investigation of top mass measurements with the atlas detector at lhc, 2005.
- [19] O. et al. Buchmueller. Prediction for the Lightest Higgs Boson Mass in the CMSSM using Indirect Experimental Constraints. *Physics Letters B*, 657/1-3, 2007. arxiv:abs/0707.3447.
- [20] Douglas Clowe et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *Astrophys. J.*, 648:L109–L113, 2006.
- [21] (Ed. ) d’Enterria, David G. et al. CMS physics technical design report: Addendum on high density QCD with heavy ions. *J. Phys.*, G34:2307–2455, 2007.
- [22] K. Desch, T. Nattermann, P. Wienemann, and C. Zendler. Measuring the endpoint of the di-tau mass spectrum in  $\tilde{\chi}_2^0$  decays with the ATLAS detector at the LHC. *ATLAS note*, 2008.
- [23] B.C.Allanach et al. The Snowmass Points and Slopes: Benchmarks for SUSY Searches. 2002. hep-ph/0202233v1.
- [24] P. Skands et al. SUSY Les Houches Accord: Interfacing SUSY Spectrum Calculators, Decay Packages, and Event Generators. 2007. hep-ph/0311123.
- [25] W.-M.Yao et al. (Particle Data Group). The Review of Particle Physics. *J. Phys. G* 33, 1 (2006) and 2007 partial update for the 2008 edition, 200r78.
- [26] The LHC / LC Study Group. Physics Interplay of the LHC and the ILC. 2004. arXiv:hep-ph/0410364v1.
- [27] F. Halzen and A.D. Martin. Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. 1984.
- [28] E. Komatsu et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations:Cosmological Interpretation. 2008.
- [29] E. Lytken. Prospects for Slepton Searches with Atlas.
- [30] D. R. Tovey M. M. Nojiri, G. Polesello. Measuring the Mass of the Lightest Chargino at the CERN LHC. 2003. arxiv:hep-ph/0312318v1.
- [31] Z. Maki, M. Nakagawa, Y. Ohnuki, and S. Sakata. A unified model for elementary particles. *Prog. Theor. Phys.*, 23:1174–1180, 1960.
- [32] S. P. Martin. A Supersymmetry Primer. 2006. arXiv:hep-ph/9709356v4.
- [33] M. Masera and L. Ramello. Results from PYTHIA at LHC energies. 1990. CERN-90-10-B.
- [34] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics* 21 (6), 1953.
- [35] L. Moneta, F. James, and M Winkler. <http://www.cern.ch/minuit>.

- [36] J. A. Nelder and R. A. Mead. A Simplex Method for Function Minimization. *Computer Journal*, 1965.
- [37] M. M. Nojiri, G. Polesello, and D. R. Tovey. Constraining Dark Matter in the MSSM at the LHC. 2005. hep-ph/0512204v1.
- [38] P. Wienemann P. Bechtle, K. Desch. <http://www-flc.desy.de/fittino>.
- [39] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. An Introduction to Quantum Field Theory. 1995.
- [40] G. Polesello. Prospects for the detection of heavy charginos and neutralinos with the ATLAS detector at the LHC. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 30, 2004.
- [41] W. Porod. SPheno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at  $e^+e^-$  colliders. *Comput. Phys. Commun* 153, 2003. hep-ph/0301101.
- [42] Trodden, M. Baryogenesis and Leptogenesis, 2004.



# Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit eigenständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Mathias Uhlenbrock, Bonn, den 5. Mai 2010